



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Рубцовский индустриальный институт
ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

А.С. Демидов
Н.А. Кулагина

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 1
Статика и кинематика

Учебное пособие для студентов заочной формы обучения специальностей
190201.65 «Автомобиле- и тракторостроение»,
190601.65 «Автомобили и автомобильное хозяйство»,
190206.65 «Сельскохозяйственные машины и оборудование»,
151001.65 «Технология машиностроения»,
150204.65 «Машины и технология литейного производства»,
260601.65 «Машины и аппараты пищевых производств»,
290300 «Промышленное и гражданское строительство»

Рубцовск 2009

УДК 531.1/3

Демидов А.С., Кулагина Н.А. Теоретическая механика. Часть 1: Статика и кинематика: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения специальностей 190201.65 «Автомобиле - и тракторостроение», 190601.65 «Автомобили и автомобильное хозяйство», 190206.65 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», 151001.65 «Технология машиностроения», 150204.65 «Машины и технология литейного производства», 260601.65 «Машины и аппараты пищевых производств», 290300 «Промышленное и гражданское строительство»/ Рубцовский индустриальный институт.- Рубцовск, 2009. -112 с.

Пособие содержит необходимый теоретический материал разделов «Статика» и «Кинематика», рассматриваемый по курсу «Теоретическая механика» в рамках учебных программ, 6 расчётно-графических заданий, примеры их выполнения. Предназначено в качестве рабочего материала при изучении студентами заочной формы обучения дисциплины «Теоретическая механика».

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры "СиМ"
Рубцовского индустриального института.
Протокол № 4 от 16.11.09 г.

Рецензент:

к.т.н., доцент А.К. Фокеев

Содержание

Введение	5
--------------------	---

Раздел 1

СТАТИКА

1.1. Основные понятия статики	6
1.2. Основные аксиомы статики	7
1.3. Система сходящихся сил. Геометрический способ сложения сходящихся сил. Равнодействующая сходящихся сил. Разложение сил	7
1.4. Проекция сил на ось.	10
1.5. Равновесие системы сходящихся сил.	12
1.6. Система параллельных и антипараллельных сил. Момент силы относительно точки	13
1.7. Произвольная система сил.	17
1.8. Равновесие произвольной плоской системы сил	18
1.9. Связи и реакции.	19
1.10. Условные обозначения связей и нагрузок на расчетных схемах	22
1.11. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Понятие статического момента	25

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛОК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»(С1)	30
--	----

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛОК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»(С1)	37
--	----

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ПЛОСКИХ РАМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»(С2)	41
--	----

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ПЛОСКИХ РАМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»(С2)	48
--	----

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ И ПОЛОЖЕНИЙ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТЕЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ»(С3)	51
--	----

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ И ПОЛОЖЕНИЙ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТЕЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ»(С3)	62
--	----

Раздел 2

КИНЕМАТИКА

2.1. Кинематика точки	66
2.2. Кинематика твердого тела. Поступательное движение твердого тела	70
2.3. Вращательное движение тела и его характеристики	71
2.4. Плоскопараллельное движение твердого тела	76
2.5. Определение скорости точек плоской фигуры. Теорема скоростей точек, принадлежащих телу, совершающему плоскопараллельное движение	78
2.6. Мгновенный центр скоростей (МЦС).	78
2.7. Определение ускорений точек плоской фигуры	80
2.8. Мгновенный центр ускорений (МЦУ).	82
2.9. Сложное движение точки. Относительное, переносное и абсолютное движения	84
2.10. Теорема о сложении скоростей.	85
2.11. Теорема о сложении ускорений (Теорема Кориолиса)	86
ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТОЧКИ»(К1)	88
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТОЧКИ»(К1)	90
ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»(К2)	93
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»(К2)	100
ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА»(К3)	103
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА»(К3)	105
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	112

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее методическое пособие представляет собой сборник необходимого теоретического материала и 6 расчётно-графических работ (с примерами их выполнения), рассматриваемых в разделах статики и кинематики по курсу «Теоретическая механика» студентами специальностей 190201.65 «Автомобиле- и тракторостроение», 190601.65 «Автомобили и автомобильное хозяйство», 190206.65 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», 151001.65 «Технология машиностроения», 150204.65 «Машины и технология литейного производства», 260601.65 «Машины и аппараты пищевых производств», 290300 «Промышленное и гражданское строительство».

Выполняемые расчётно-графические работы по указанному курсу охватывают следующие темы:

1. Определение опорных реакций балок, находящихся под действием произвольной системы сил.
2. Определение опорных реакций плоских рам, находящихся под действием произвольной системы сил.
3. Определение статических моментов и положений центров тяжести твердых тел.
4. Кинематика точки.
5. Кинематика твердого тела и механической системы.
6. Кинематический анализ плоского шарнирного механизма.

Согласно рассматриваемым темам, пособие содержит необходимые теоретические сведения. К предлагаемым расчётно-графическим заданиям приводятся примеры их выполнения.

Данное учебное пособие рассчитано на активизацию самостоятельной работы студентов заочной формы обучения.

РАЗДЕЛ 1. СТАТИКА

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются законы и условия равновесия материальных тел. В общем курсе статики изучаются только задачи о равновесии твердых (абсолютно твердых) тел.

Абсолютно твердым телом (абсолютно жестким) называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается всегда постоянным. Тело, которому можно сообщить любое перемещение, называется *свободным*. В противном случае – *несвободным*.

Рассматриваемые в механике величины разделяются на *скалярные* и *векторные* величины.

Скалярные величины полностью характеризуются числовым значением, например, время – t (сек).

Векторные величины характеризуются числовым значением и направлением в пространстве. Например, сила - характеризуется числовым значением или модулем силы, направлением и точкой приложения. Модуль силы оценивают путем сравнения с силой, принятой за единицу измерения.

Единица измерения силы в системе СИ - H (Ньютон). Графически сила изображается в виде вектора, обозначается как \vec{F} . Длина этого вектора (направленного отрезка) в выбранном масштабе соответствует *модулю силы* F .

Прямую, по которой направлен вектор силы, называют *линией действия силы*.

Как правило, на произвольное тело действует не одна, а несколько сил.

Системой сил называют совокупность сил, действующих на данное тело (тела). Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, такая система сил называется *плоской*. В противном случае система сил будет *пространственной*.

Свойства силы (системы сил):

1) Если систему сил, действующих на свободное твердое тело (тела), можно заменить другой системой сил, не изменяя при этом состояние покоя (движения) данного тела или данных тел, то такие системы сил будут называться *эквивалентными* друг другу.

2) Система сил, обуславливающая нахождение свободного твердого тела в состоянии покоя, называется *уравновешенной* или эквивалентной нулю.

3) Если данная система сил эквивалентна одной силе, то такая сила будет являться *равнодействующей* данной системы.

4) Сила, равная по модулю равнодействующей и действующая противоположно равнодействующей, называется *уравновешивающей силой*.

5) *Внешними* считаются силы, которые действуют на тело (систему тел) извне. *Внутренними* силами считаются силы, с которыми части данного тела (или данной системы) действуют друг на друга.

6) Сила, приложенная к телу в одной точке, называется *сосредоточенной*.

Силовая нагрузка, действующая на все или на некоторые примыкающие к друг другу точки данного объема, плоскости или линии тела, называется *распределенной*.

Сосредоточенные силы могут представлять собой равнодействующую некоторых систем распределенных сил. К примеру, сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собой равнодействующую элементарных сил тяжести, действующую на его частицы.

Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую *центром тяжести*.

7) Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются *сходящимися*, а систему, которую они образуют, называют *системой сходящихся сил*. Силы, линии действия которых параллельны друг другу, называют *параллельными*, а систему, которую они образуют - *системой параллельных (антипараллельных) сил*.

8) Система двух антипараллельных сил, равных друг другу по модулю, с линиями действия, отстоящими друг от друга на некотором расстоянии, называют *парой сил*.

1.2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ СТАТИКИ

1. Если на твердое тело действуют две силы, то тело будет находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

2. Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.

3. Действие силы на твердое тело не изменится, если перенести данную силу вдоль её линии действия в любую точку тела.

4. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют *равнодействующую*, приложенную в этой точке и являющуюся диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил, как на сторонах (*правило параллелограмма*).

5. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие (*третий закон Ньютона*).

6. Равновесие в некоторых случаях изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если его считать абсолютно твердым (отвердевшим).

1.3. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛ

Величина силы \vec{R}' , равная геометрической сумме сил какой-либо системы, называется *главным вектором* этой системы сил. Не следует

смешивать понятия равнодействующей системы сил \vec{R} и главного вектора системы сил \vec{R}' . Для некоторых систем сил равнодействующей не существует, а геометрическую сумму (главный вектор) можно всегда определить. Для системы сходящихся сил понятие равнодействующей системы и главного вектора тождественно: $\vec{R} \equiv \vec{R}'$. С целью приведения системы сходящихся к более простому виду применяют геометрические и аналитические способы сложения этих сил. Рассмотрим геометрический способ сложения сходящихся сил на примере плоской системы сил.

1. Сложение двух сил. Геометрическая сумма $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ системы двух сходящихся сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (равнодействующая или главный вектор) находится по *правилу параллелограмма*. Модуль их равнодействующей \vec{R} определяется по формуле:

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha}, \quad (1.1)$$

где $\alpha = (\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2)$, (см. рис.1).

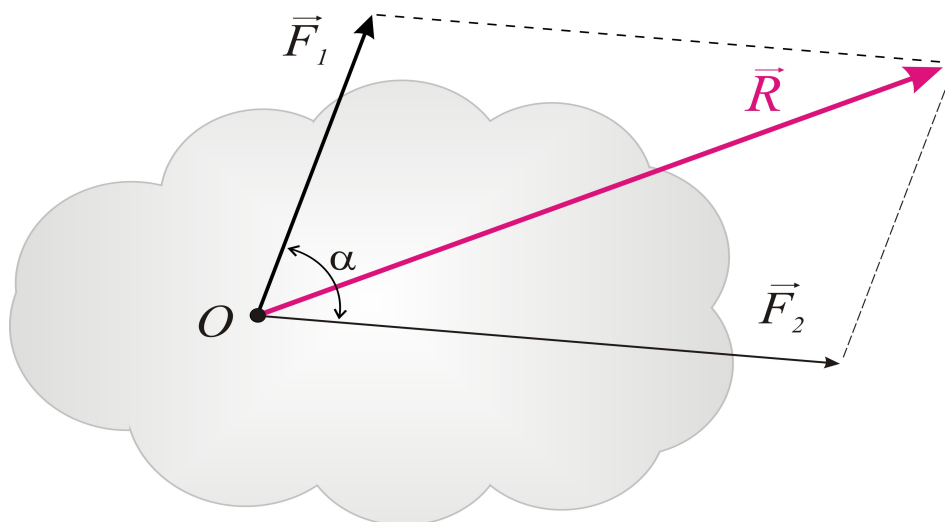


Рис.1. Геометрический способ сложения в системе сходящихся сил - правило параллелограмма

3. Сложение системы сил. Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется с помощью последовательного применения *правила параллелограмма* или построением *силового многоугольника*.

Второй способ является более практичным. В этом случае для системы сил (например, сходящихся сил) откладывают от произвольной точки O вектор, изображающий в выбранном масштабе силу \vec{F}_1 , от точки a - вектор, изображающий силу \vec{F}_2 , от точки b - вектор, изображающий силу \vec{F}_3 , и т.д. Соединив начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\vec{R}' \equiv \vec{R}$, изображающий геометрическую сумму, или главный вектор

СИСТЕМЫ СИЛ $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{или} \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.2)$$

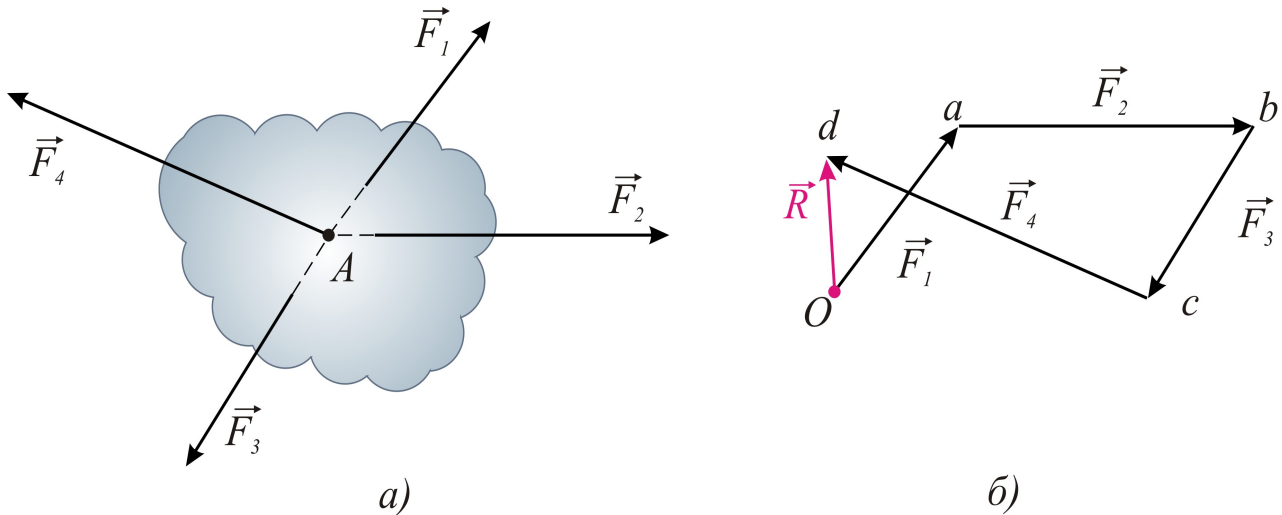


Рис.2. Геометрический способ сложения плоской системы сходящихся сил:
а) расчётная схема; б) незамкнутый силовой многоугольник ($\vec{R} \neq 0$)

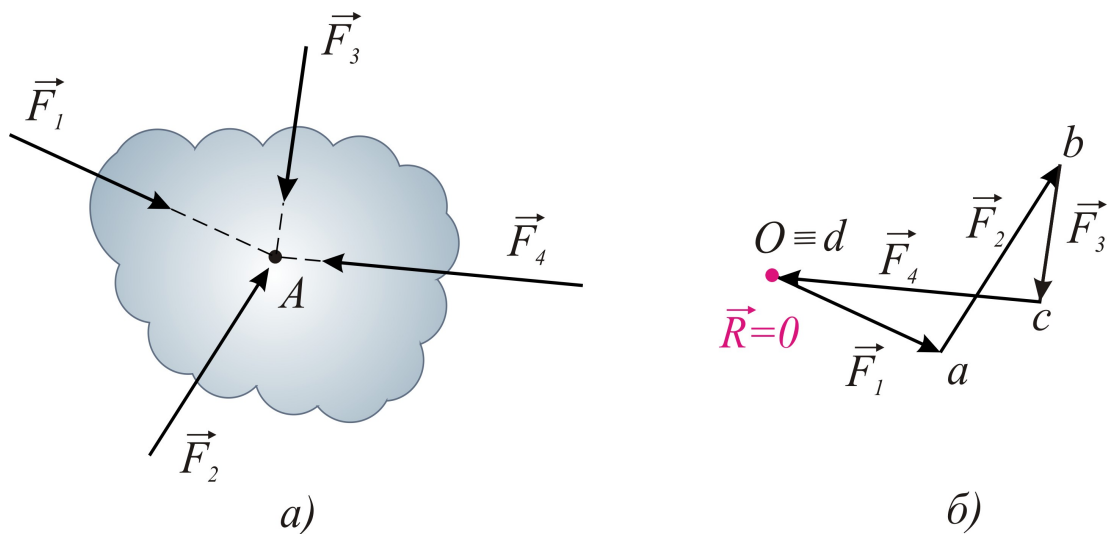


Рис.3. Геометрический способ сложения плоской системы сходящихся сил: а) расчётная схема; б) замкнутый силовой многоугольник ($\vec{R} = 0$) (система является уравновешенной)

Для пространственной системы трех сходящихся сил применяют так называемое *правило параллелепипеда*, согласно которому модуль и направление главного вектора $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ определяется диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, рис. 4. Для пространственной системы сходящихся сил определение положения и модуля главного вектора сводится к последовательному применению вышеуказанного правила.

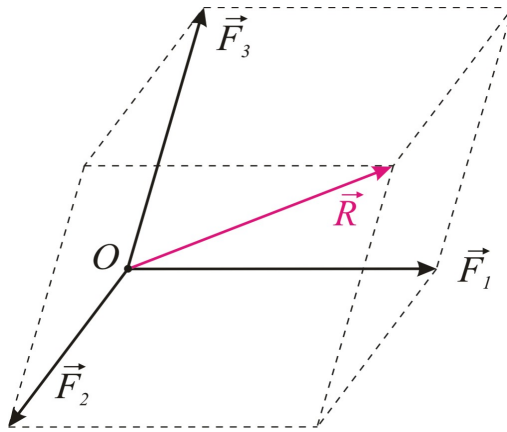


Рис.4. Геометрический способ сложения сил в системе трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости

4. Равнодействующая сходящихся сил. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения линий действия. Следовательно, система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (см. рис. 3, а) имеет равнодействующую \vec{R} , равную главному вектору \vec{R}' и приложенную в точке А (или в любой точке, находящейся на линии действия силы \vec{R} , проведенной через точку А).

5. Разложение вектора силы \vec{F}_1, \vec{F}_2 по направлениям сводится к применению правил, обратных правилам параллелограмма или параллелепипеда (см. рис. 1 и рис. 4), соответственно.

1.4. ПРОЕКЦИЯ СИЛ НА ОСЬ

Проекция силы (вектора) \vec{F} на ось x есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad (1.3)$$

где $\alpha = (\vec{F}, \hat{Ox})$.

Если α острый - проекция положительная величина, тупой - отрицательная, прямой - равна 0 (рис. 5).

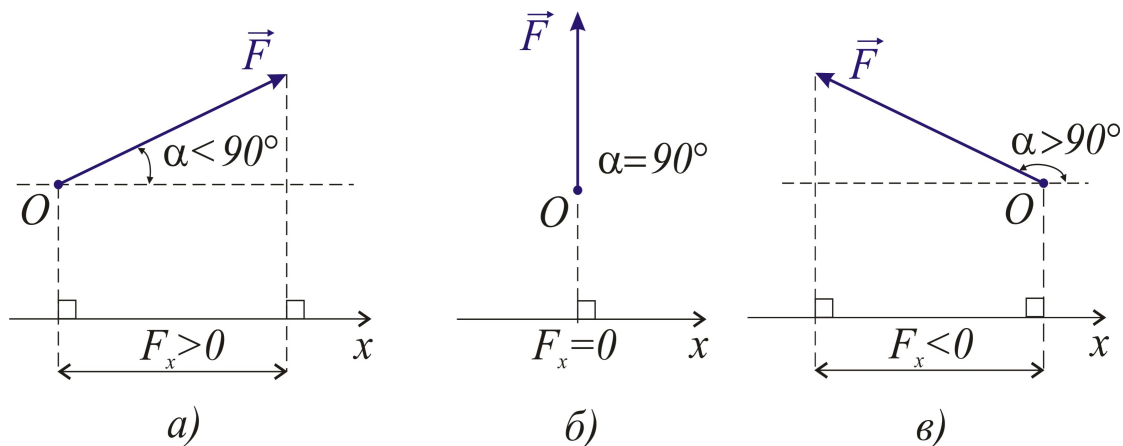


Рис.5. Проекция вектора силы на ось

Проекцией вектора силы \vec{F} на плоскость называется вектор \vec{F}' , заключенный между проекциями начала и конца силы F на эту плоскость.

К примеру, на рис. 6 изображена проекция вектора \vec{F} , приложенного в произвольной точке A на плоскость Oxy .

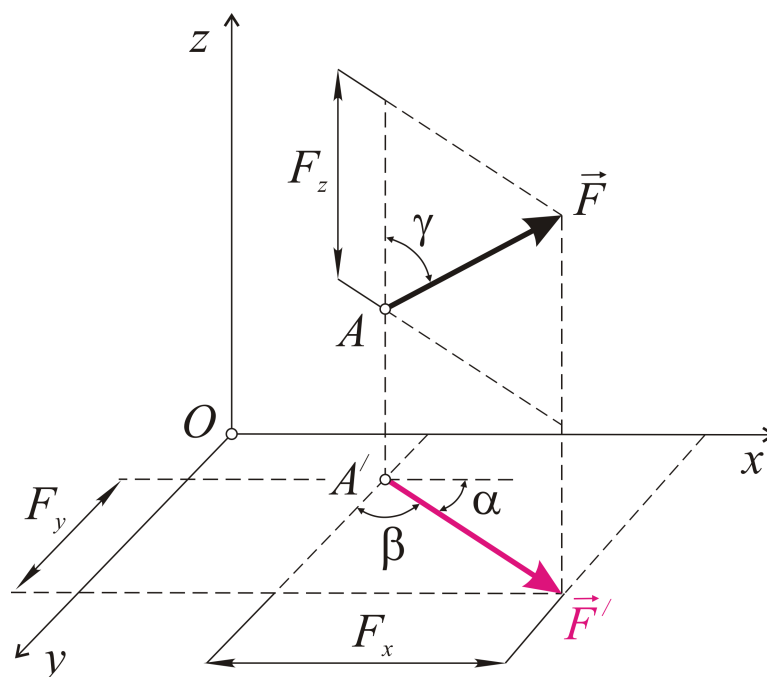


Рис. 6. К определению проекции вектора на плоскость

Для аналитического решения удобно задавать силу её проекциями на координатные оси: F_x, F_y, F_z .

Для трехмерного пространства модуль вектора силы определяется как:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.4)$$

Положение данного вектора в пространственной системе оценивается при помощи направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (1.4')$$

Для двумерного пространства модуль силы определяется:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (1.5)$$

а положение:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}. \quad (1.5')$$

Аналитический способ сложения сходящихся сил основан на теореме о том, что проекция вектора суммы векторов на любую ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на эту ось.

Отсюда следует, если \vec{R} - равнодействующая системы сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, то $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$

и

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (1.6)$$

Зная R_x, R_y, R_z , модуль равнодействующей для трехмерного пространства можно определить по следующей формуле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (1.7)$$

Положение равнодействующей определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (1.7')$$

где $\alpha = (\vec{R}, \hat{Ox})$, $\beta = (\vec{R}, \hat{Oy})$, $\gamma = (\vec{R}, \hat{Oz})$.

Для двумерного пространства:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (1.8)$$

а положение равнодействующей:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}. \quad (1.8')$$

Если силы заданы в виде модулей, углов с осями, для применения аналитического метода сложения надо предварительно вычислить проекции этих сил на координатные оси.

1.5. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1. *Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.*

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут, т.е. чтобы модуль главного вектора $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ данной системы сил был равным 0.

2. Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил.

Условие равновесия пространственной системы рассматривают в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Т.е. для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую координатную ось были равны 0.

Для плоской системы:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Теорема о трех силах

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Отметим, что обратной теоремы не существует, так как тело под действием трех сил может и не находиться в равновесии. Отсюда следует, что теорема выражает необходимое, но недостаточное условие равновесия системы сходящихся сил.

1.6. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Системой параллельных (антипараллельных) сил называется система, в которой линии действия сил, составляющих данную систему, параллельны.

Рассмотрим случай, когда система состоит из двух параллельных сил, направленных в одну сторону и $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$. Модуль равнодействующей в таком случае будет равен алгебраической сумме модулей этих сил, а равнодействующая делит расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам. Таким образом:

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad (1.11)$$

Равнодействующая двух антипараллельных сил (примем $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$) равна по модулю разности модулей этих сил, расположена за большей силой и направлена в ту же сторону, рис. 7, б).

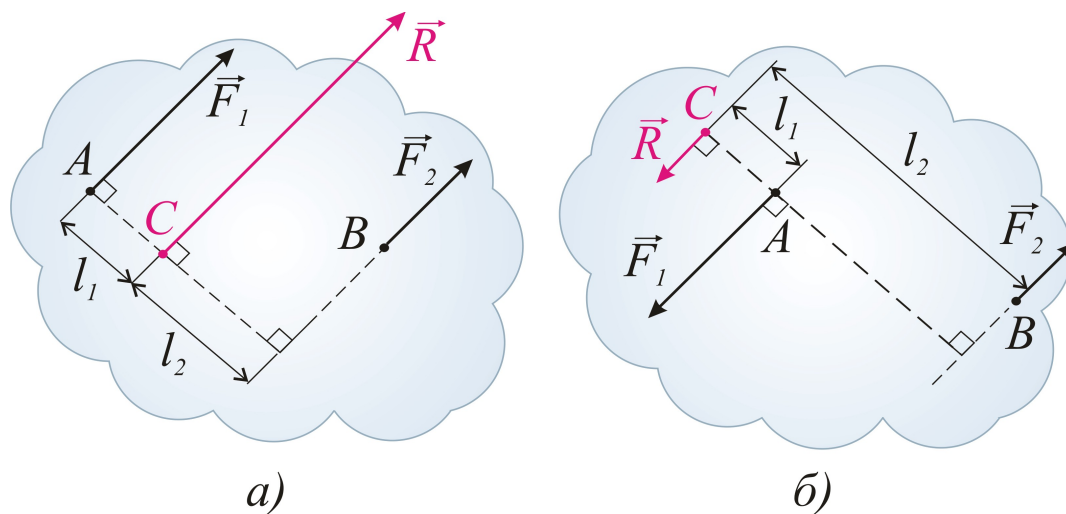


Рис.7. Определение положения равнодействующей системы:
а) двух параллельных сил; б) двух антипараллельных сил

Линия действия равнодействующей и в этом случае отстоит от линий действия сил на расстояниях, обратно пропорциональных этим силам:

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (1.12)$$

Система двух антипараллельных сил, равных модулю, называется *системой пары сил* (рис.8).

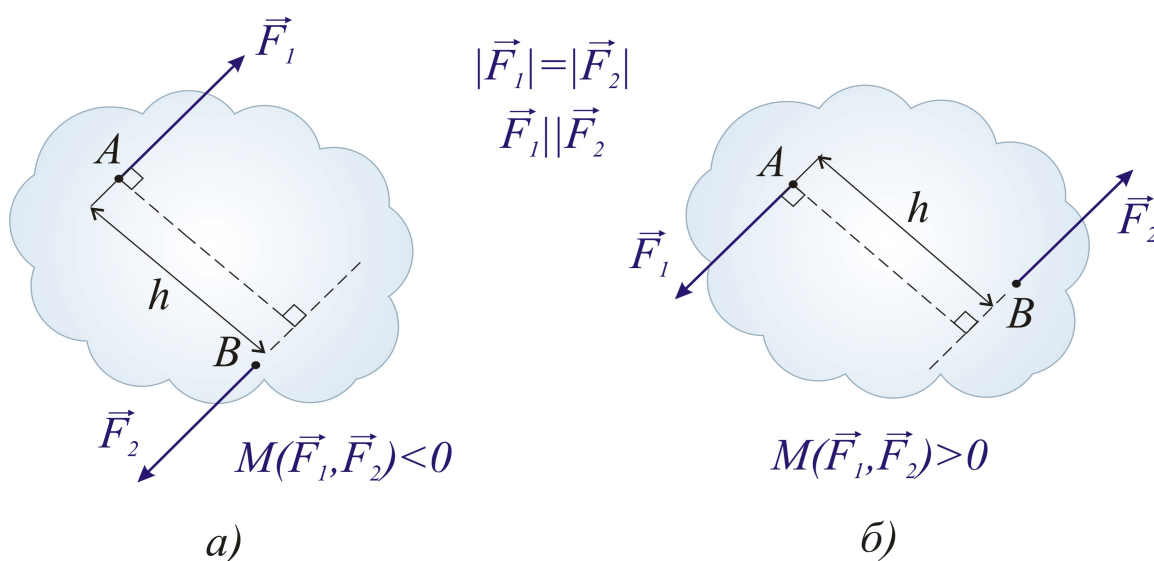


Рис. 8. Система пары сил и правило знаков момента пары сил (силы): а) пара сил с положительным моментом; б) пара сил с отрицательным моментом

Расстояние h между линиями действия этих сил называется *плечом пары*. Так как две силы, равные по модулю и направленные в противоположные стороны, не лежат на одной линии действия, то твердое тело, к которому приложена пара, не находится в равновесии. Пара сил стремится повернуть твердое тело, к которому она приложена.

Мерой действия пары сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) является алгебраическая величина, называемая *моментом* M .

Момент пары сил (*алгебраический момент*) равен по абсолютной величине произведению модуля одной из сил пары на плечо, взятое со знаком плюс или минус:

$$M = \pm |\vec{F}_i| \cdot h, \quad [H \cdot m]. \quad (1.13)$$

Правило знаков моментов

Если пара сил стремится повернуть тело против часовой стрелки, то момент считается положительным, а если по часовой – отрицательным (см. рис.8). Момент, показанный на рис. 8, *а*, согласно правилу знаков – отрицательный, на рис. 8, *б* - положительный.

Теория пар на плоскости состоит из 4 положений.

1. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки не зависит от выбора этой точки.

2. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскости её действия.

3. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны.

4. При сложении нескольких пар сил на плоскости получается равнодействующая пара, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар:

$$M = M_1 + \dots + M_n, \quad \text{или} \quad M = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (1.14)$$

Для равновесия твердого тела под действием системы пар сил, лежащих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов данных пар равнялась нулю:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (1.15)$$

Момент можно также представлять в виде традиционного вектора.

В этом случае *моментом силы \vec{F} относительно точки O* называется приложенный в точке O вектор $M_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы \vec{F} на плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда эта сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки. Согласно этому определению:

$M_o(\vec{F}) = F \cdot h = 2 \text{ пл. } \triangle OAB = |\vec{OA} \times \vec{F}| = |\vec{r} \times \vec{F}|$, где \vec{r} - радиус-вектор точки A , проведенный из центра O .

Здесь необходимо вспомнить определение векторного произведения: «..векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , и направленный перпендикулярно плоскости этих векторов в сторону, откуда кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} виден происходящим против хода часовой стрелки».

Согласно этому определению, вектор момента силы относительно точки можно представить как векторное произведение: $\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$, рис. 9.

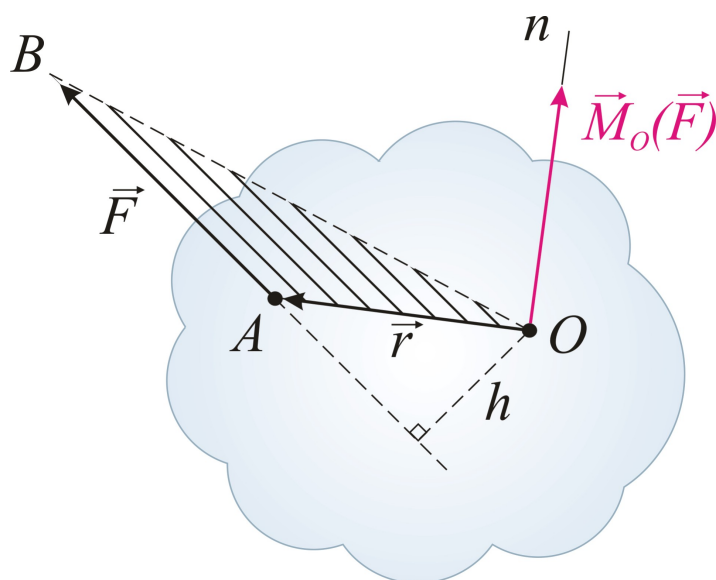


Рис.9. Векторное представление момента пары (силы)

Вне зависимости от источника формирования алгебраического момента, знак его величины определяется по правилу, где *положительным считается момент, вращательный эффект которого при взгляде с выбранного направления виден против хода часовой стрелки* и наоборот.

Свойства момента:

Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии действия.

Момент силы относительно центра O равен нулю, если линия действия силы проходит через центр O .

Теорема о параллельном переносе силы.

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда эта сила переносится.

Таким образом, можно использовать приведение силы к данной точке для преобразования произвольной системы сил в простейшую.

1.7. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

Рассмотрим следующее определение:

Главным вектором \vec{R}' называется векторная сумма сил, приложенных к твердому телу, или:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.16)$$

Проекции главного вектора \vec{R}' на оси декартовых координат равны суммам проекций сил данной системы на эти же оси:

$$R'_x = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i x, \quad R'_y = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i y, \quad R'_z = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i z. \quad (1.17)$$

Модуль главного вектора можно определить как

$$|\vec{R}'| = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z}. \quad (1.18)$$

Направляющие косинусы главного вектора:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\vec{R}' \wedge Ox) = \frac{R'_x}{R'}; \\ \cos \beta &= \cos(\vec{R}' \wedge Oy) = \frac{R'_y}{R'}; \\ \cos \gamma &= \cos(\vec{R}' \wedge Oz) = \frac{R'_z}{R'}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Отличие главного вектора \vec{R}' от равнодействующей \vec{R} заключается в том, что равнодействующая \vec{R} - это одна сила, эквивалентная данной системе сил, а главный вектор \vec{R}' эквивалентен данной системе сил только в совокупности с парой, момент которой равен M_O .

Главным моментом M_O относительно центра O называется сумма моментов сил, приложенных к твердому телу, относительно этого центра:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_i). \quad (1.20)$$

Исходя из определения, \vec{R}' является статическим инвариантом системы, т.е. величина и направление главного вектора \vec{R}' не зависит от центра приведения системы. Главный момент M_O при перемене центра приведения меняется, то есть зависит от выбора точки приведения.

Теорема Вариньона для произвольной плоской системы сил. Если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки.

$$M_o(\vec{R}) = \sum M_o(\vec{F}_i). \quad (1.21)$$

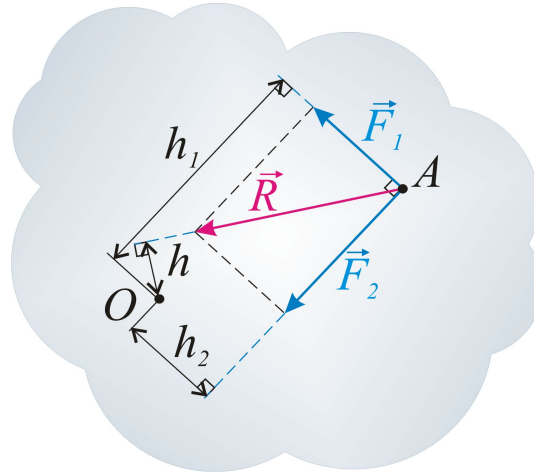


Рис. 10. К теореме Вариньона о моменте равнодействующей относительно точки: $M_o(\vec{R}) = h \cdot |\vec{R}| = h_1 \cdot |\vec{F}_1| - h_2 \cdot |\vec{F}_2|$

1.8. РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил оси и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки O равнялась нулю:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_y = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_o(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

В уравнениях (1.22) оси, относительно которых составляются уравнения проекций, не должны быть параллельны друг другу.

Возможны другие варианты рассматриваемых систем уравнений равновесия, например:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

При этом необходимо учесть, что ось, относительно которой составляется уравнение проекций, не должна быть расположена перпендикулярно прямой, проходящей через две точки, относительно которой составляются уравнения моментов. Можно применить следующие условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Выражения (1.24) можно использовать в случае, если эти три точки не лежат на одной прямой.

Условия равновесия твердого тела под действием плоской системы параллельных сил будут следующими:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Причем в этом случае ось x не должна быть перпендикулярной к рассматриваемым силам.

1.9. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ

Свободных тел в природе фактически не существует. Как правило, что-то препятствует перемещению данного тела. Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют другие тела, называется *несвободным*.

В таком случае все, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называется *связью*. *Реакция связи* – это сила действия связи на данное тело. Реакция связи характеризуется своим значением, точкой

приложения и направлением. Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную тому направлению, в котором она препятствует перемещению данного тела. Рассмотрим основные виды связей.

1. Реакция \vec{N} гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали \vec{n} к поверхности соприкасающихся тел и приложена в точке касания (см. рис. 11, а). В том случае, если в месте контакта одна из соприкасающихся поверхностей вырождается при плоском рассмотрении в точку, то реакция \vec{N} направляется по нормали к другой поверхности (рис. 11, б).

2. Связь, представленная в виде гибкой нерастяжимой нити. Реакция \vec{T} направлена вдоль нити к точке подвеса (рис. 11, в и рис. 13).

3. Связь в виде цилиндрического шарнира. Реакция \vec{R} может иметь любое направление в плоскости xOz , перпендикулярной оси шарнира y (рис.12).

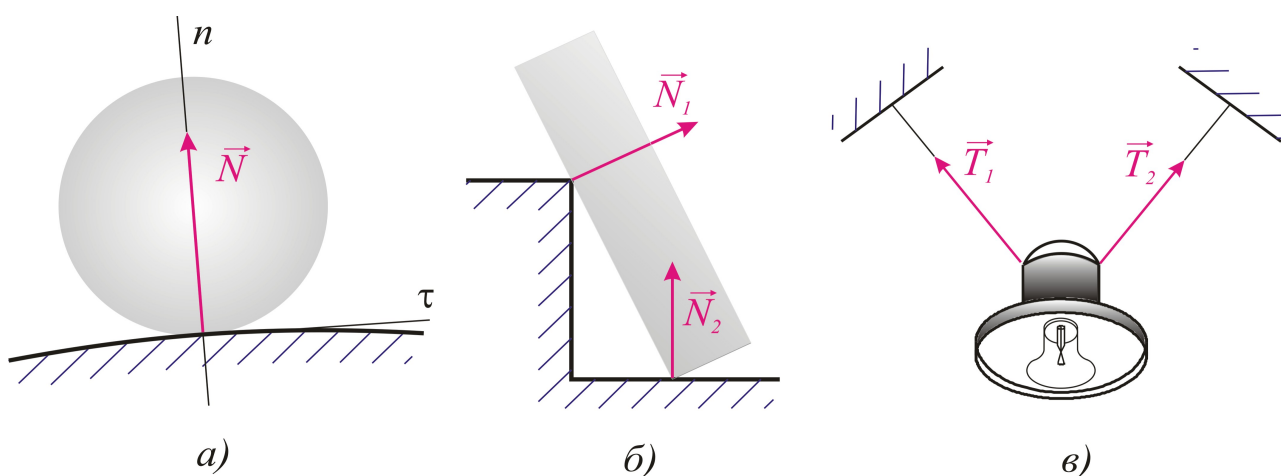


Рис. 11. Виды связей

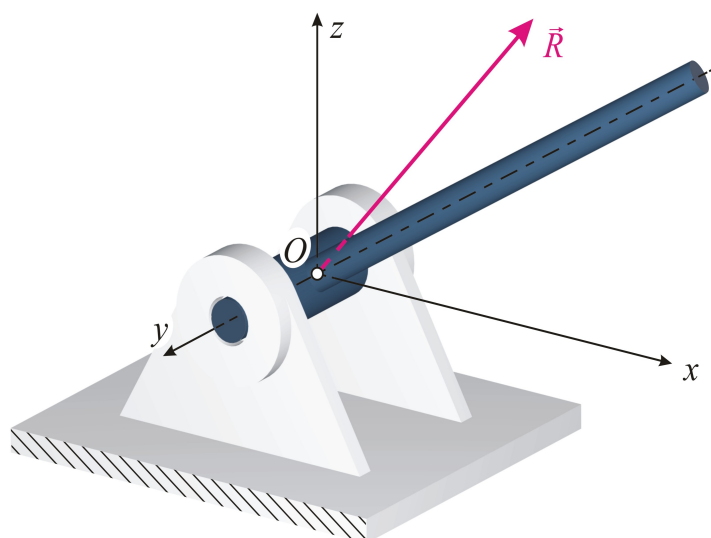


Рис.12. Реакция цилиндрического шарнира

4. Реакция невесомого шарнирно закрепленного прямолинейного стержня \vec{N} направлена по оси стержня. Если стержень пытаются растянуть, она направлена к опорной поверхности (\vec{N}_2); если стержень пытаются сжать – от опорной поверхности (\vec{N}_1) (рис. 14). Принято считать стержень *невесомым*, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь.

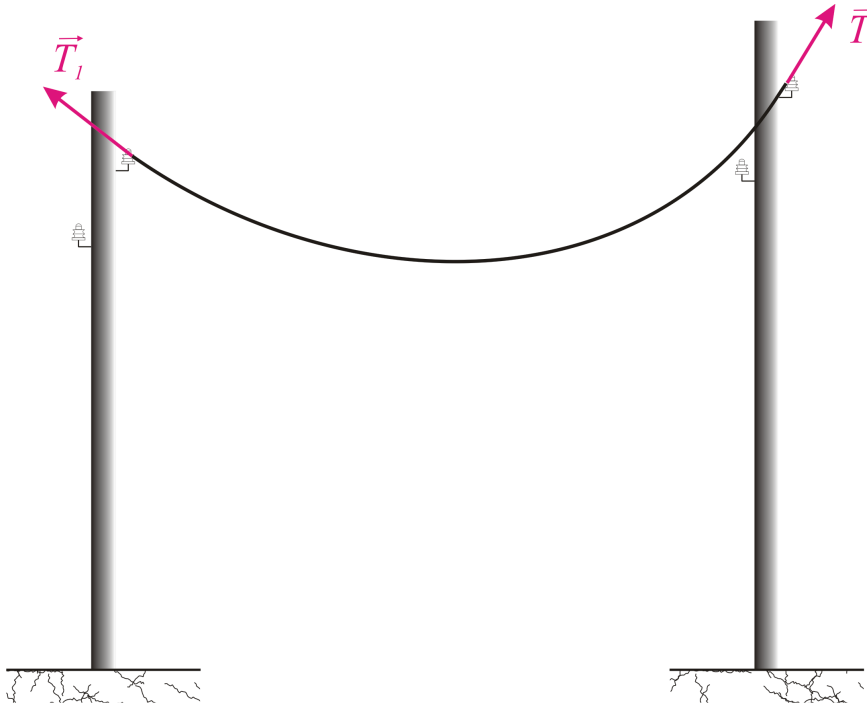


Рис.13. Реакция гибкой связи

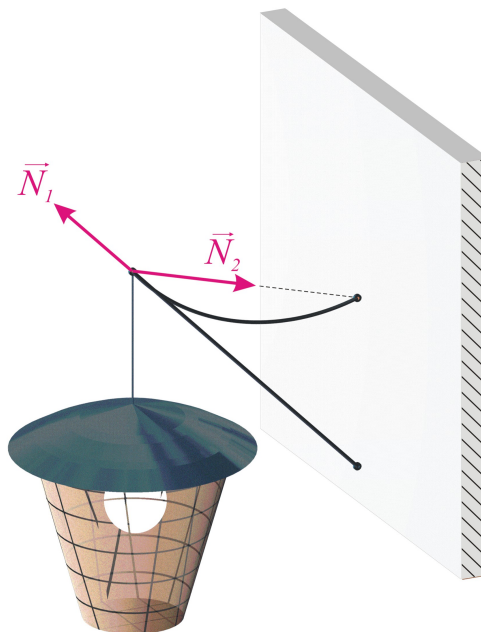


Рис.14. Реакции шарнирных невесомых стержней

1.10. УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ СВЯЗЕЙ И НАГРУЗОК НА РАСЧЕТНЫХ СХЕМАХ

Положение несвободного тела в пространстве (плоскости) определяется его связями.

На практике используются различные способы крепления элемента с условно неподвижными поверхностями (плоскостями). Связи элементов, рассматриваемые в задачах статики, конструктивно реализуются в виде так называемых *опор*. Для плоских задач статики рассмотрим основные виды опор и принятые их условные обозначения.

Связь, которая препятствует линейному перемещению элемента в одном направлении, перпендикулярном неподвижной (опорной) поверхности, конструктивно реализуется в виде *шарнирно-подвижной* опоры, условное обозначение на рис. 15, а. Направление данной реакции изначально известно - она проходит по нормали от опорной поверхности, рис. 16, а.

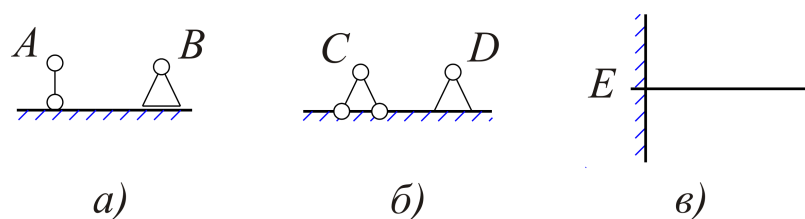


Рис. 15. Условное обозначение плоских опор: а) шарнирно-подвижная; б) шарнирно-неподвижная; в) жесткая заделка

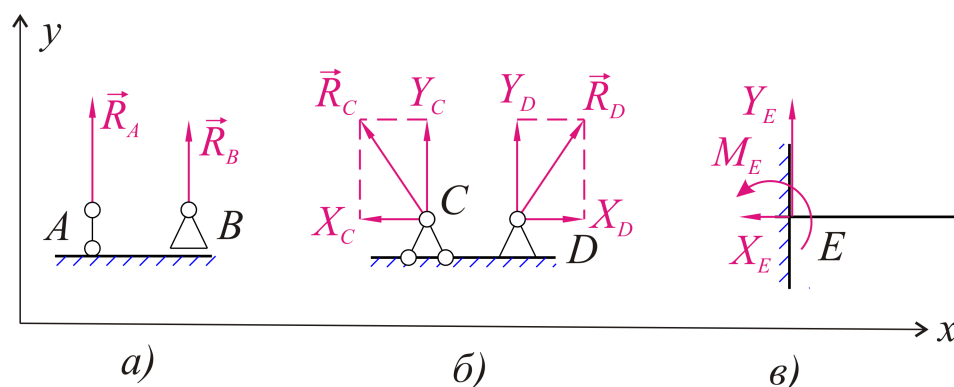


Рис. 16. Реакции плоских опор: а) шарнирно-подвижной; б) шарнирно-неподвижной; в) жесткой заделки

Связь, которая препятствует двум взаимно перпендикулярным линейным перемещениям элемента в плоскости, конструктивно реализуется в виде *шарнирно-неподвижной* опоры, условное обозначение см. на рис. 15, б. Направление данной реакции неизвестно, как правило, её представляют в виде двух неизвестных составляющих полной реакции, рис. 16, б.

Связь, которая препятствует перемещениям элемента в плоскости по трем направлениям - двум линейным и одному угловому, конструктивно реализуется в виде опоры, называемой *жесткой заделкой*, условное обозначение см. на

рис.15, в. Реакцию жесткой заделки представляют в виде трех неизвестных составляющих: двух взаимно перпендикулярных линейных реакций и одной угловой (опорного момента), рис. 16, в.

Реакции связей при решении задач статики обычно являются величинами неизвестными и подлежат определению. Величины и направления опорных реакций зависят от внешних нагрузок.

По характеру приложения внешнюю нагрузку можно рассматривать как *сосредоточенную* и *распределённую*.

Сосредоточенная нагрузка передает внешнее усилие через площадку, размерами которой пренебрегают, по сравнению с размерами самого элемента (геометрическую точку). При рассмотрении условий равновесия сосредоточенную наклонную силу, как правило, представляют в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих. Порядок замены наклонной силы двумя составляющими представлен на рис. 17.

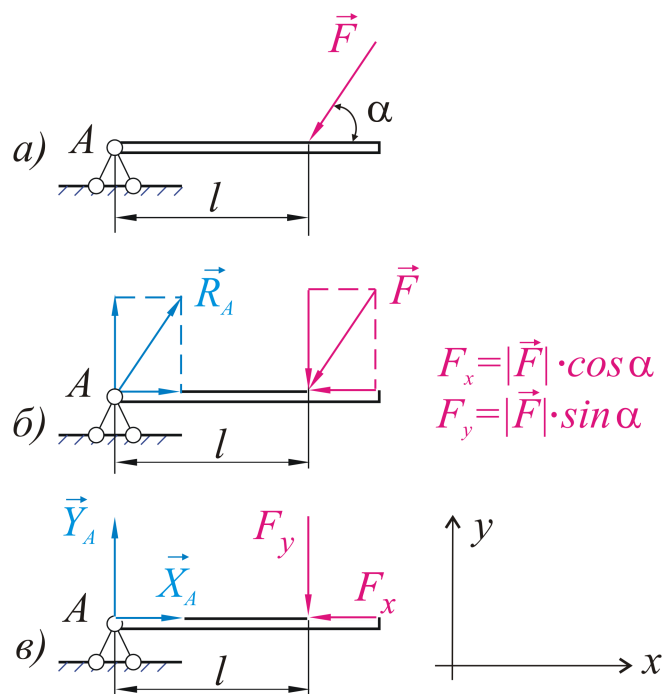


Рис. 17. Замена наклонной силы её составляющими по направлениям осей x, y : а) исходная схема; б) определение положения и модулей составляющих; в) схема, эквивалентная исходной

На схемах пару сил, рис. 18 а, как правило, представляют в виде условного обозначения сосредоточенного момента этой пары, рис. 18, б, точка приложения которого, согласно теории пар, может быть где угодно в плоскости его действия, рис. 18, в-д.

Распределённая нагрузка передаёт внешнее усилие через площадку, размерами которой, по сравнению с размерами самого элемента, пренебречь нельзя.

В плоских задачах распределённая нагрузка характеризуется своей *интенсивностью* q .

Интенсивность q показывает, какое количество силы передается на

рассматриваемый элемент через единицу длины вдоль линии распределения.

В системе СИ интенсивность распределённой нагрузки измеряется в $[H/m]$.

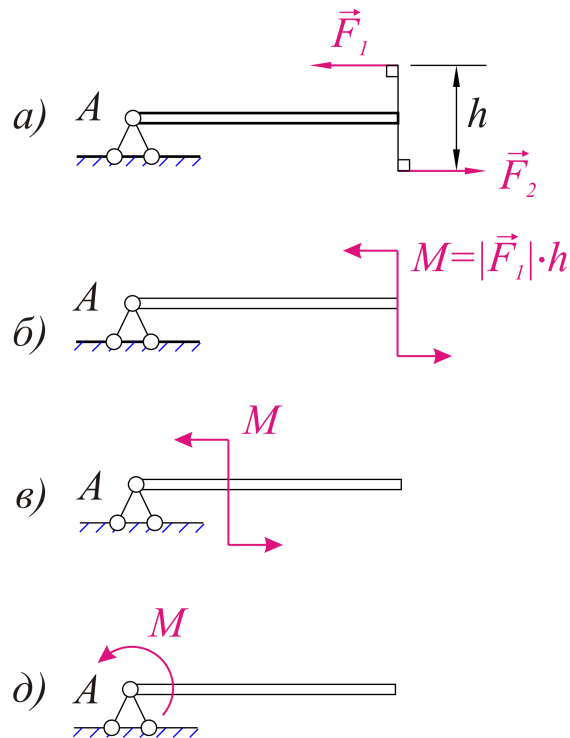


Рис.18. Обозначение передачи вращательного эффекта на элемент:
 а) посредством пары сил; б) в виде эквивалентного сосредоточенного момента этой пары; в-д) перенос точек приложения этого сосредоточенного момента в плоскости его действия в соответствии с теорией пар на плоскости

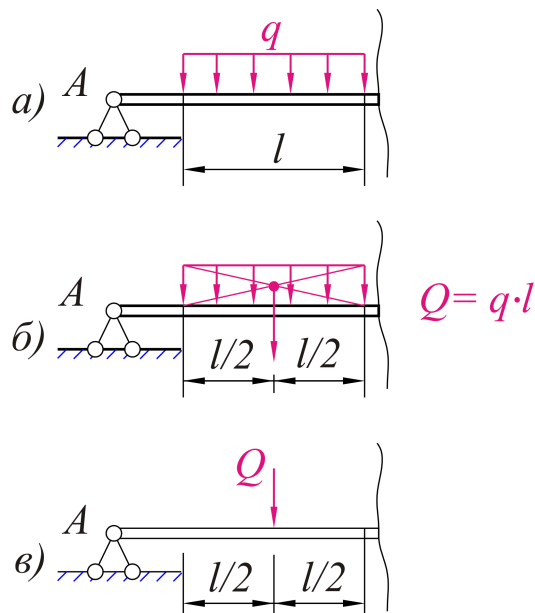


Рис.19. Замена распределённой нагрузки сосредоточенным эквивалентом: а) исходная схема; б) определение положения и модуля эквивалента; в) последующая расчётная схема

При рассмотрении условий равновесия, как правило, от распределённой нагрузки избавляются, заменяя её действие на элемент соответствующим сосредоточенным эквивалентом $Q, [H]$.

Величина этого эквивалента определяется площадью фигуры распределения, а положение – расположением её центра тяжести. Последовательность замены равномерно распределённой нагрузки её сосредоточенным эквивалентом представлена на рис. 19.

1.11. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПОНЯТИЕ СТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассмотрим систему параллельных сил $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, приложенных в точках A_1, \dots, A_n (рис. 20). Такая система имеет равнодействующую, модуль которой

$$R = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (1.26)$$

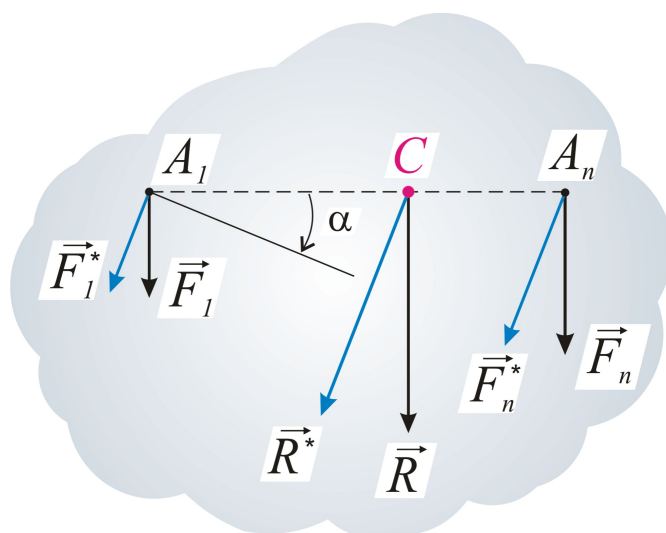


Рис.20. К определению положения центра системы параллельных сил

При повороте данной системы сил на некоторый угол α линии действия каждой из представленных сил будут сохранять свою параллельность, также поворачиваясь на угол α .

Модуль равнодействующей в таком случае будет оставаться величиной постоянной, но направление равнодействующей всякий раз будет меняться. Можно попытаться определить такую геометрическую точку C , через которую будет проходить линия действия равнодействующей системы при любых её углах поворота. Такая точка C называется *центром параллельных сил*.

Координаты центра параллельных сил определяются при помощи последовательного применения теоремы Вариньона относительно оси.

В окончательном виде формулы для пространственной системы параллельных сил:

$$\begin{aligned}x_c &= R^{-1} \cdot \sum F_n x_n; \\y_c &= R^{-1} \cdot \sum F_n y_n; \\z_c &= R^{-1} \cdot \sum F_n z_n.\end{aligned}\tag{1.27}$$

На тело, находящееся вблизи земной поверхности, действует сила тяжести, вектор которой направлен к геометрическому центру Земли.

Силы тяжести можно считать параллельными силами. В таком случае центр параллельных сил тяжести называется *центром тяжести твердого тела*. Равнодействующая сил тяжести \vec{P} называется весом тела, модуль которой:

$$P = \sum p_n,\tag{1.28}$$

где p_n - сила тяжести, действующая на n -ную - элементарную частицу твердого тела (рис. 21).

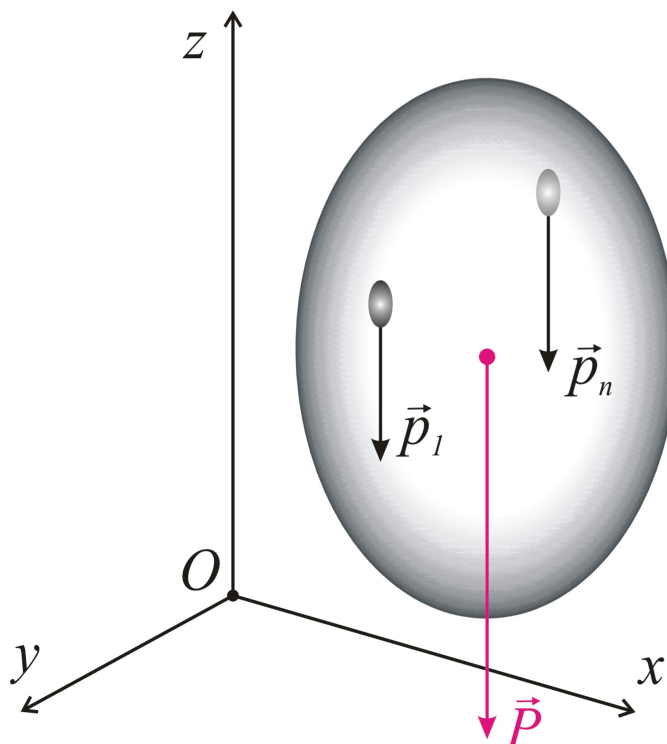


Рис. 21. К определению центра тяжести твердого тела

Координаты центра тяжести твердого тела C определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
x_C &= P^{-1} \cdot \sum p_n x_n; \\
y_C &= P^{-1} \cdot \sum p_n y_n; \\
z_C &= P^{-1} \cdot \sum p_n z_n.
\end{aligned}
\tag{1.29}$$

Координаты центра тяжести твердого однородного тела (центра тяжести объема) C могут быть выражены через элементарные объемы по формулам:

$$\begin{aligned}
x_C &= V^{-1} \cdot \sum V_n x_n; \\
y_C &= V^{-1} \cdot \sum V_n y_n; \\
z_C &= V^{-1} \cdot \sum V_n z_n.
\end{aligned}
\tag{1.30}$$

При сложной форме твердого тела:

$$\begin{aligned}
x_C &= V^{-1} \cdot \int_V x dV; \\
y_C &= V^{-1} \cdot \int_V y dV; \\
z_C &= V^{-1} \cdot \int_V z dV.
\end{aligned}
\tag{1.30'}$$

Координаты центра тяжести для тонкой однородной пластины (плоского тела) могут быть выражены через элементарные площади по формулам:

$$x_C = A^{-1} \cdot \sum A_n x_n; \quad y_C = A^{-1} \cdot \sum A_n y_n.
\tag{1.31}$$

При сложной форме плоского твердого тела:

$$x_C = A^{-1} \cdot \int_A x dA; \quad y_C = A^{-1} \cdot \int_A y dA;
\tag{1.31'}$$

Координаты центра тяжести для тела, состоящего из n тонких стержней:

$$x_C = L^{-1} \cdot \sum l_n x_n; \quad y_C = L^{-1} \cdot \sum l_n y_n; \quad z_C = L^{-1} \cdot \sum l_n z_n.
\tag{1.32}$$

При сложной форме составляющих стержней:

$$x_C = L^{-1} \cdot \int_L x dl; \quad y_C = L^{-1} \cdot \int_L y dl; \quad z_C = L^{-1} \cdot \int_L z dl.
\tag{1.32'}$$

Данные по площадям и объемам наиболее широко распространенных видов твердых тел систематизированы и приведены в различных справочниках.

Для определения положений центров тяжести применяют следующие методы:

1) *Метод симметрии.*

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести расположен, соответственно, в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии.

2) *Метод разбиения.*

При данном методе однородное тело сложной формы разбивают на ряд простых (имеющих длину, площадь, объём, соответственно) и положение центра тяжести которых легко определить.

3) *Метод отрицательных площадей и объёмов.*

В частных случаях при наличии в однородном теле пустот, отверстий, выемок и других нарушений сплошности вычисления можно вести, используя обычные формулы, считая при этом характеристики таких элементов (площадь, объём) отрицательными.

При определении центра тяжести однородной тонкой пластины часто пользуются его геометрической характеристикой - статическим моментом относительно оси, лежащей в данной плоскости.

Статическим моментом сечения A относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости yOz данного сечения, называется взятая по всему сечению сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния до этой оси (рис. 22). То есть для комплекта осей y, z :

$$S_z = \int_A y dA; \quad (1.33)$$

$$S_y = \int_A z dA. \quad (1.33')$$

Для определения координат центра тяжести C плоской фигуры используется (1.31) и (1.31'). Приняв размеры элементарной площадки $A_i \rightarrow 0$, числители в формулах (1.31) будут представлять собой соответствующие статические моменты. С учётом (1.33), (1.33'):

$$S_z = \int_A y dA = y_C A; \quad (1.34)$$

$$S_y = \int_A z dA = z_C A. \quad (1.34')$$

Если рассматриваемое плоское тело с площадью A можно представить как геометрическую совокупность i -х простых площадей A_i , то последние тождества можно представить как:

$$S_z = \sum A_i \cdot y_i; \quad (1.35)$$

$$S_z = \sum A_i \cdot z_i, \quad (1.35')$$

где A_i - величина простой i -й площади, взятая с соответствующим знаком (фактическая площадь берётся со знаком «плюс»; площадь отверстий, выемок тонкой однородной однородной пластины берётся со знаком «минус»);

y_i, z_i - координаты центра тяжести простой i -й площади в выбранной системе отсчёта.

Таким образом, статический момент тонкой однородной пластины относительно какой-либо оси, лежащей в её плоскости, будет равен произведению площади данной пластины на расстояние от центра тяжести до этой оси.

Также очевидно, что из тождеств (1.34-1.35) координаты центра тяжести точки C пластины с площадью A можно легко выразить через соответствующие статические моменты,

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}; \quad (1.36)$$

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}; \quad (1.36')$$

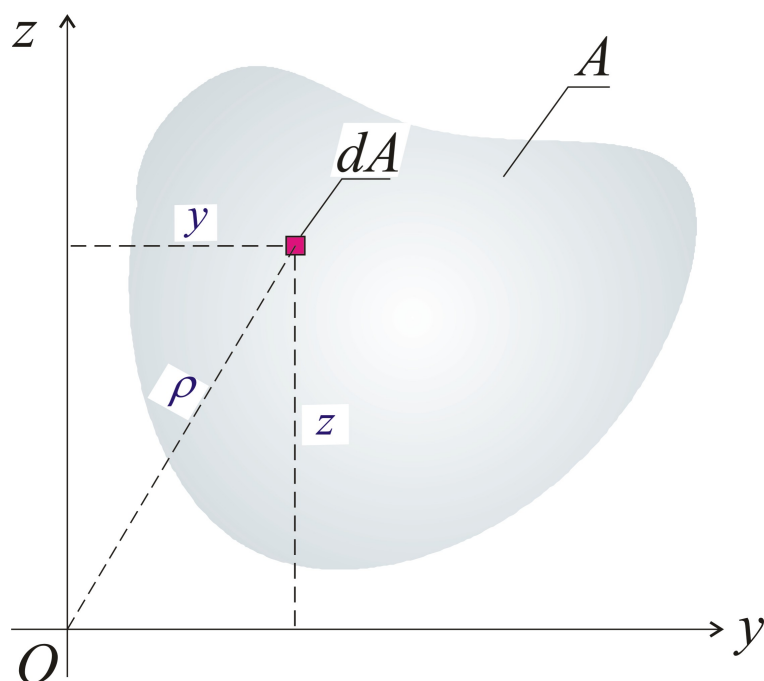


Рис.22. Параметры геометрических характеристик

Свойства статического момента:

1. Статический момент может быть величиной положительной,

отрицательной и равной нулю.

2. Статический момент сечения относительно оси, лежащей в плоскости сечения и проведенной через ее центр тяжести, равен нулю.

3. Для определения статического момента тонкой пластины можно применять метод разбиения, то есть определять статический момент всей тонкой пластины как сумму статических моментов отдельных ее частей относительно той же оси $S_J = \sum S_{J_i}$.

4. Нельзя суммировать статические моменты частей тонкой пластины, вычисленные относительно разных осей.

Статический момент в системе СИ измеряется в $[м^3]$, часто на практике статический момент измеряют в $[см^3]$.

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛОК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»(С1)

Постановка задачи

К жестким балкам (одной консольной, а другой шарнирно-опертой) приложены произвольные плоские системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2; q_1, q_2; M_1, M_2)$.

С учетом способа крепления балки с опорной поверхностью и исходя из условий статического равновесия, определить модули и направления реакций связей $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{R}_C$.

Указания

Расчетно-графическая работа С1 рассматривает равновесие тела под действием произвольной системы сил. В рамках каждого варианта задания выполняются две отдельные задачи.

При определении опорных реакций целесообразно упростить исходную схему, заменяя распределенную нагрузку её сосредоточенным эквивалентом, а наклонные силы – их горизонтальными и вертикальными составляющими.

Данные к расчету приведены в табл.2 и представлены на рис.23.

Результаты расчёта представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

Результаты расчёта

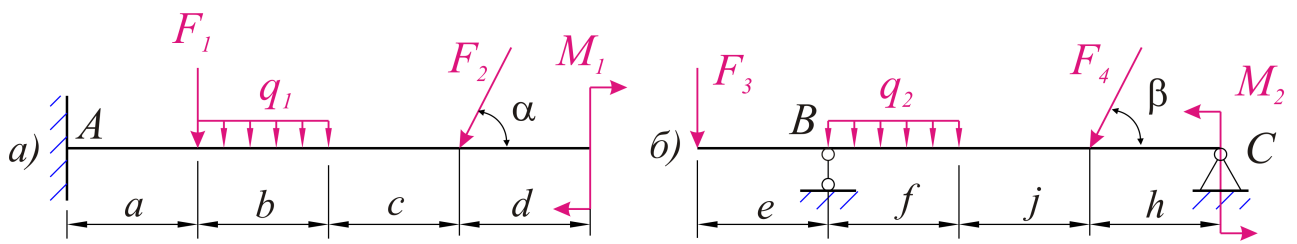
Реакция	$R_A,$ $кН$	$M_A,$ $кН*м$	$R_B,$ $кН$	$R_C,$ $кН$
Модуль				

ДАННЫЕ ВАРИАНТОВ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ (С1)

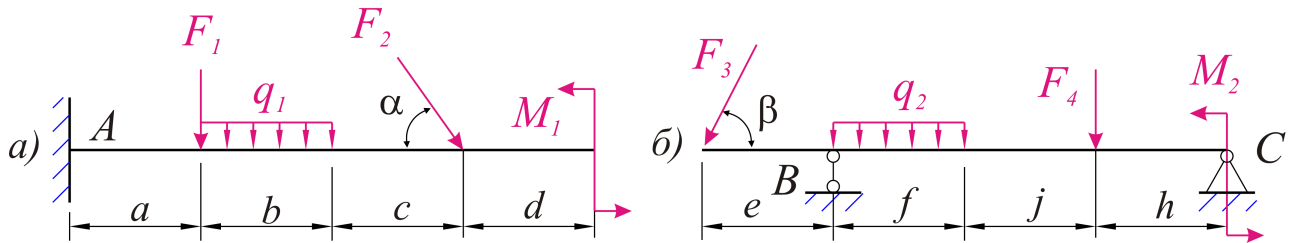
Таблица 2

Данные к работе С1

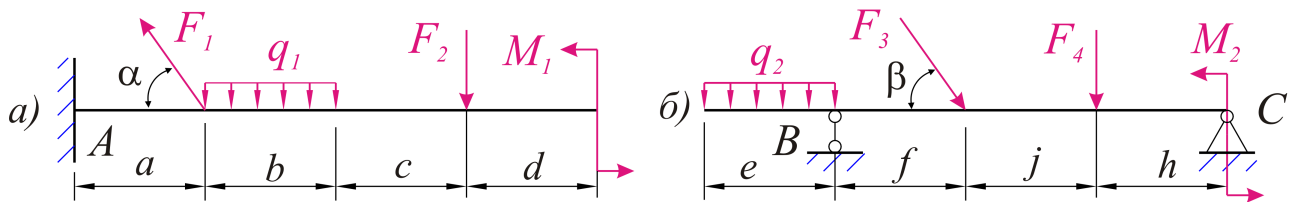
№ вар.	Линейные размеры, м								Сила F , кН				Нагрузка q , Н/м		Момент M , Н*м		Угол, градус	
	a	b	c	d	e	f	j	k	F_1	F_2	F_3	F_4	q_1	q_2	M_1	M_2	α	β
1	1	2	3	1	3	1	2	4	5	10	6	8	2	3	5	4	30	45
2	3	1	2	2	1	1	3	1	2	3	5	15	4	5	10	2	45	30
3	1	1	3	3	3	2	2	2	6	5	10	4	6	4	15	3	45	60
4	3	2	2	4	2	2	3	3	9	2	7	2	2	3	9	30	60	30
5	1	2	3	1	1	2	3	4	7	8	3	20	5	2	20	7	30	60
6	3	1	2	2	3	1	2	1	5	10	6	8	2	3	5	4	30	45
7	1	1	3	3	1	1	3	2	2	3	5	15	4	5	10	2	45	30
8	3	2	2	4	3	2	2	3	6	5	10	4	6	4	15	3	45	60
9	3	2	2	1	2	2	3	4	9	2	7	2	2	3	9	30	60	30
10	1	2	3	2	1	2	3	1	7	8	3	20	5	2	20	7	30	60
11	3	1	2	3	3	1	2	2	5	10	6	8	2	3	5	4	30	45
12	1	1	3	4	1	1	3	1	2	3	5	15	4	5	10	2	45	30
13	3	2	2	1	3	2	2	2	6	5	10	4	6	4	15	3	45	60
14	3	2	2	2	2	2	3	3	9	2	7	2	2	3	9	30	60	30
15	1	2	3	3	1	2	3	4	7	8	3	20	5	2	20	7	30	60
16	3	1	2	4	1	2	3	1	5	10	6	8	2	3	5	4	30	45
17	1	1	3	1	3	1	2	2	2	3	5	15	4	5	10	2	45	30
18	3	2	2	2	1	1	3	3	6	5	10	4	6	4	15	3	45	60
19	2	2	3	3	3	2	2	4	9	2	7	2	2	3	9	30	60	30
20	1	2	3	4	1	2	3	1	7	8	3	20	5	2	20	7	30	60
21	3	1	2	1	3	1	2	2	5	10	6	8	2	3	5	4	30	45
22	1	1	3	2	1	1	3	3	2	3	5	15	4	5	10	2	45	30
23	3	2	2	3	3	2	2	4	6	5	10	4	6	4	15	3	45	60
24	2	2	3	4	3	2	2	1	9	2	7	2	2	3	9	30	60	30
25	1	2	3	1	1	2	3	2	7	8	3	20	5	2	20	7	30	60
26	3	1	2	2	3	1	2	3	5	10	6	8	2	3	5	4	30	45
27	1	1	3	1	1	1	3	4	2	3	5	15	4	5	10	2	45	30
28	3	2	2	2	3	2	2	1	6	5	10	4	6	4	15	3	45	60
29	2	2	3	3	3	2	2	2	9	2	7	2	2	3	9	30	60	30
30	1	2	3	4	1	2	3	3	7	8	3	20	5	2	20	7	30	60



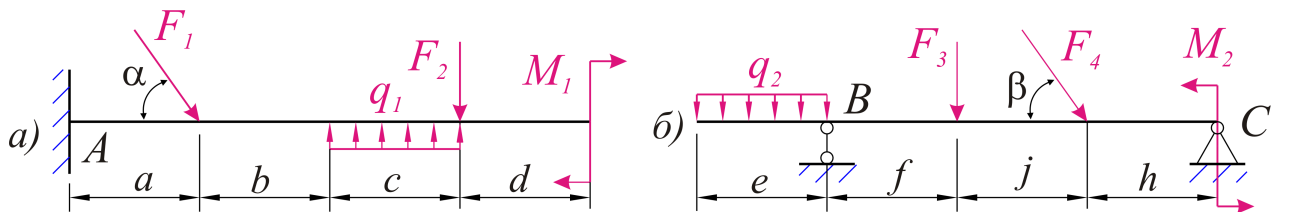
Вариант №1



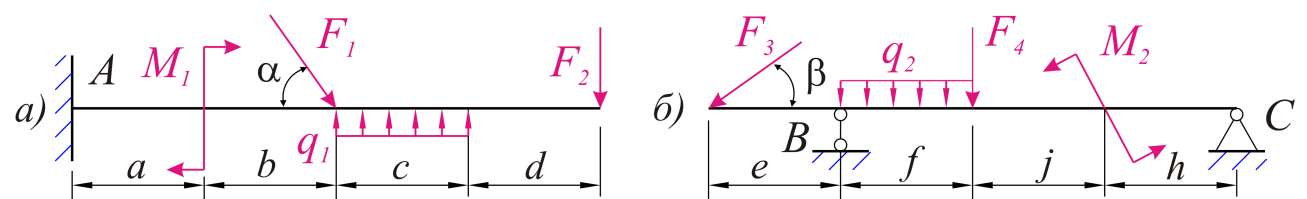
Вариант №2



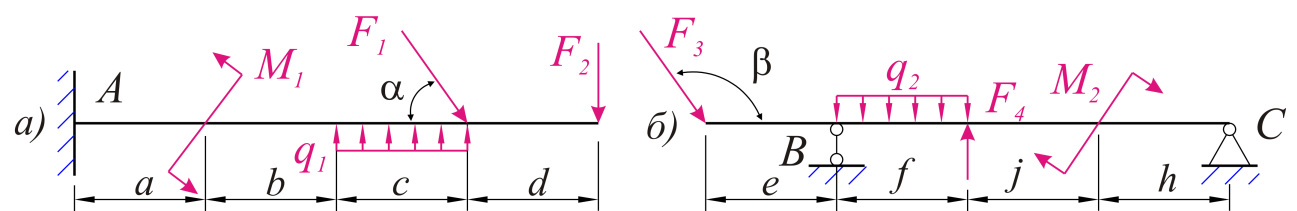
Вариант №3



Вариант №4

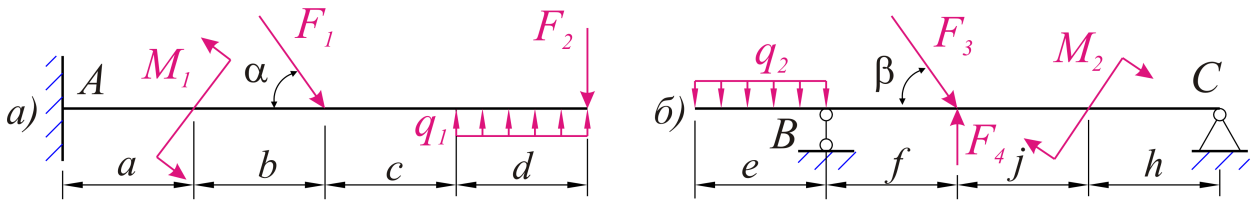


Вариант №5

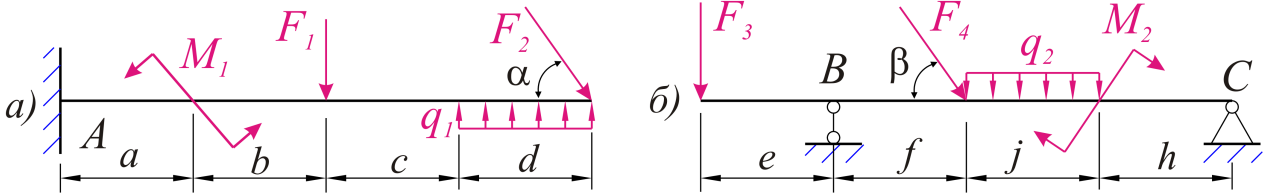


Вариант №6

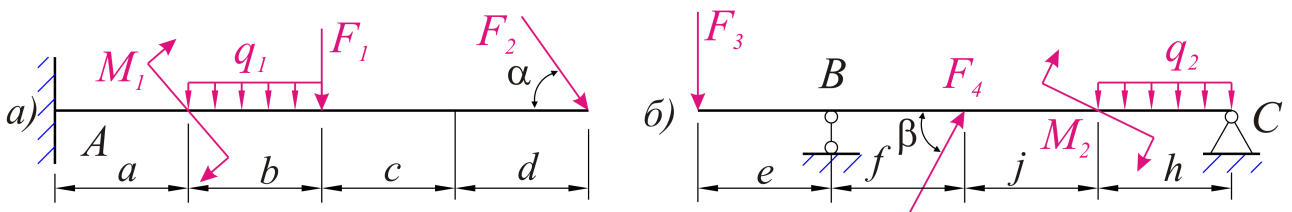
Рис. 23. Задание С1-Данные вариантов



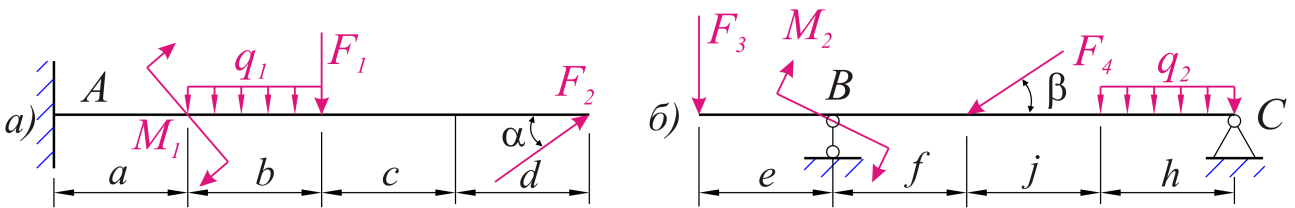
Вариант №7



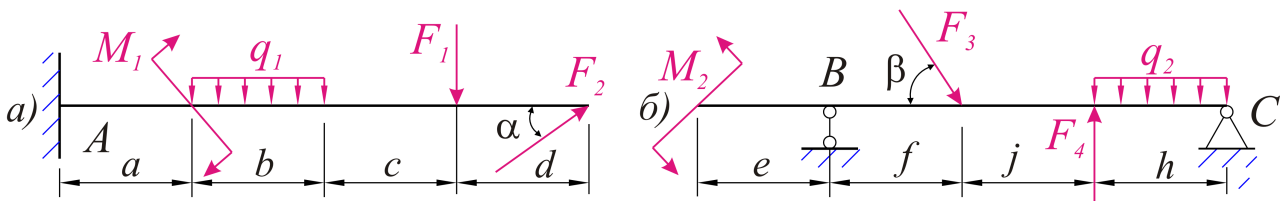
Вариант №8



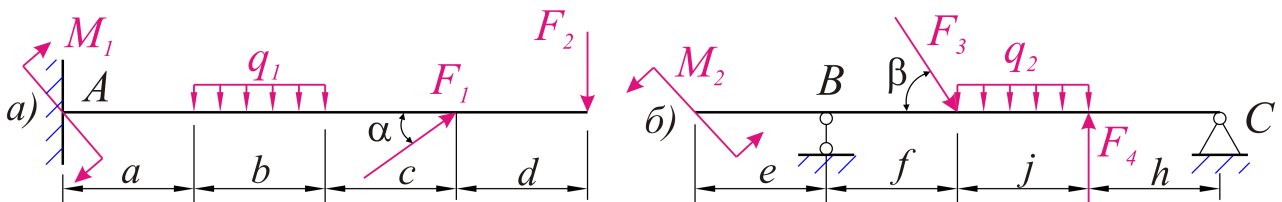
Вариант №9



Вариант №10

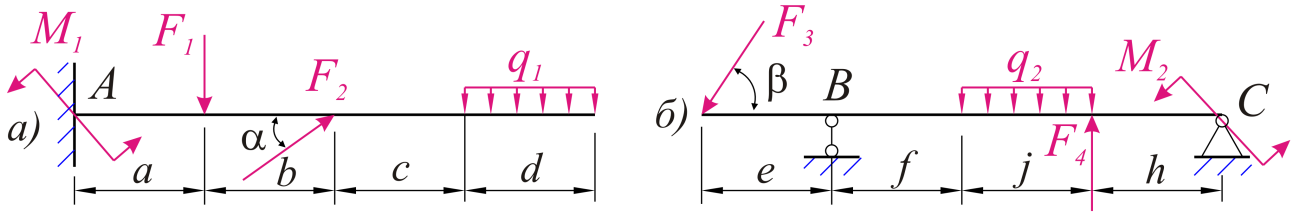


Вариант №11

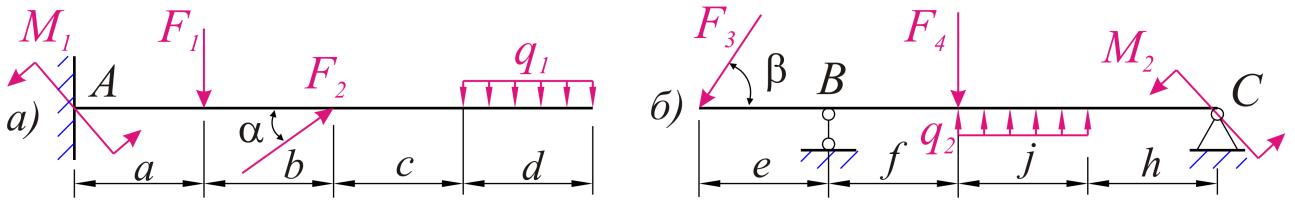


Вариант №12

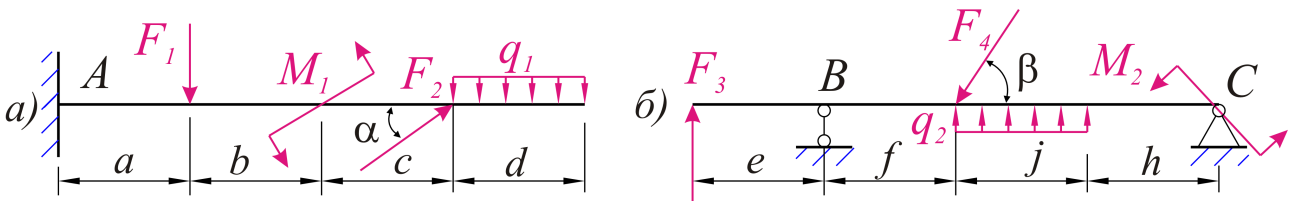
Рис.23. Продолжение: Данные вариантов. Задание С1



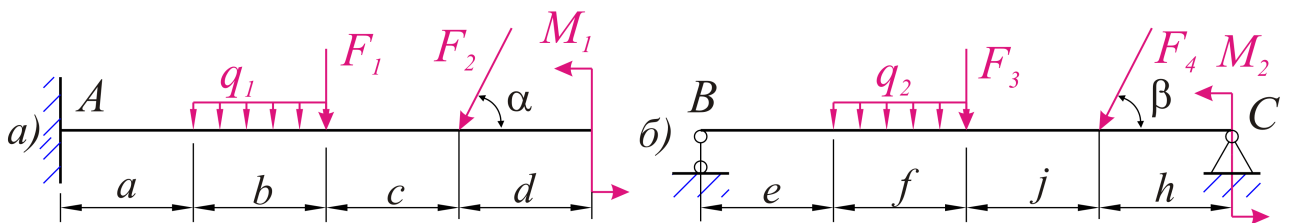
Вариант №13



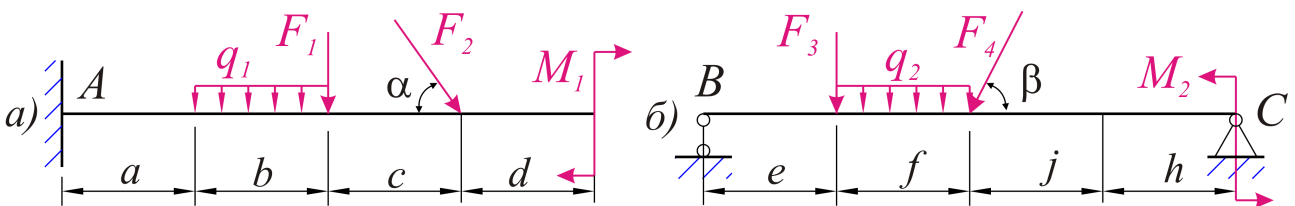
Вариант №14



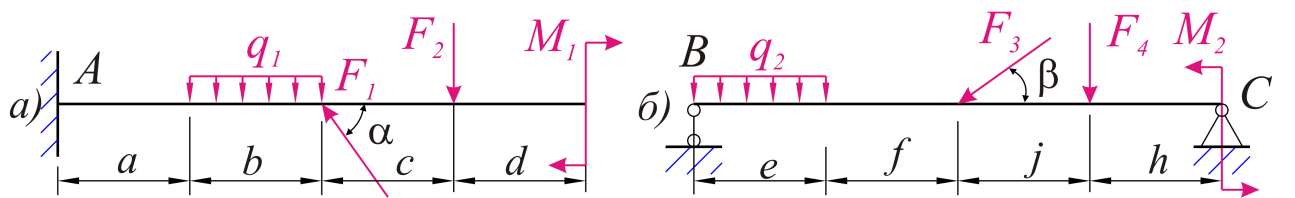
Вариант №15



Вариант №16

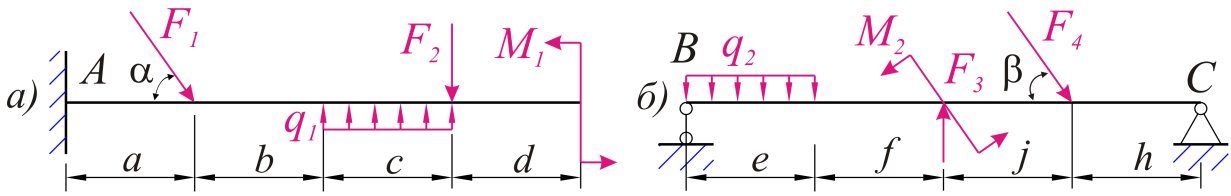


Вариант №17

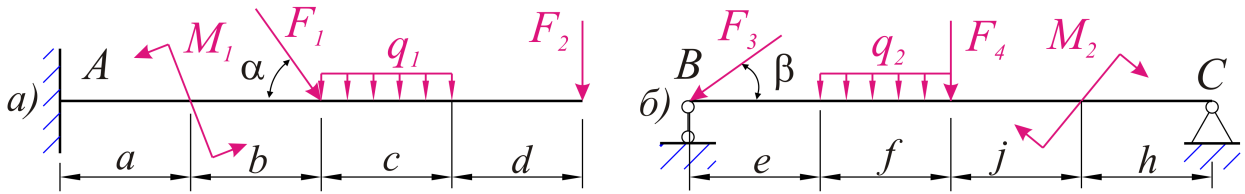


Вариант №18

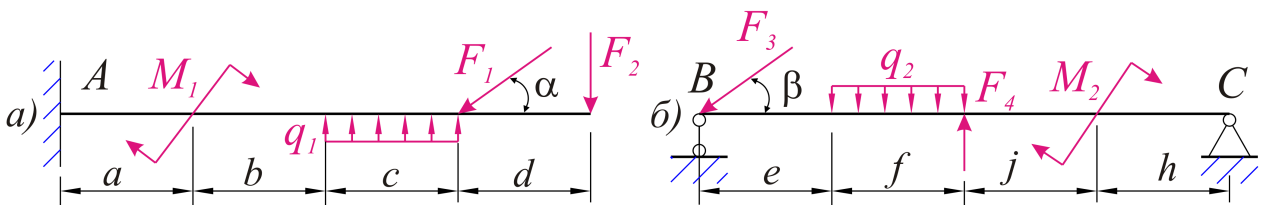
Рис. 23. Продолжение: Данные вариантов. Задание С1



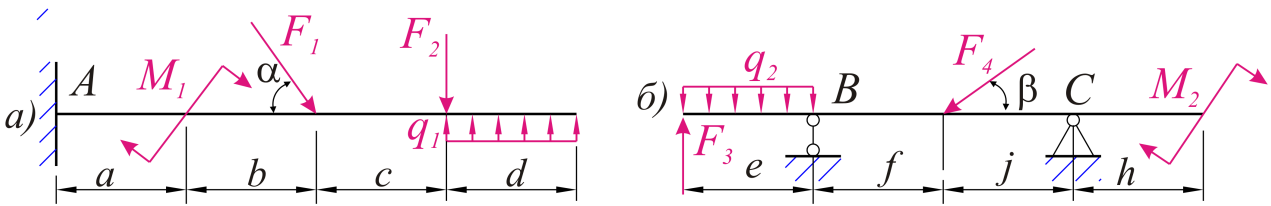
Вариант №19



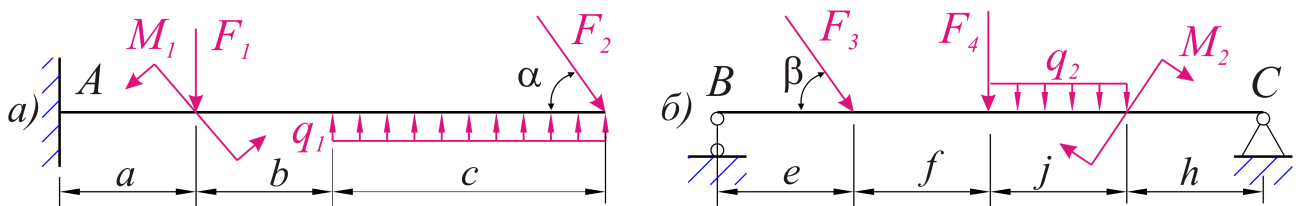
Вариант №20



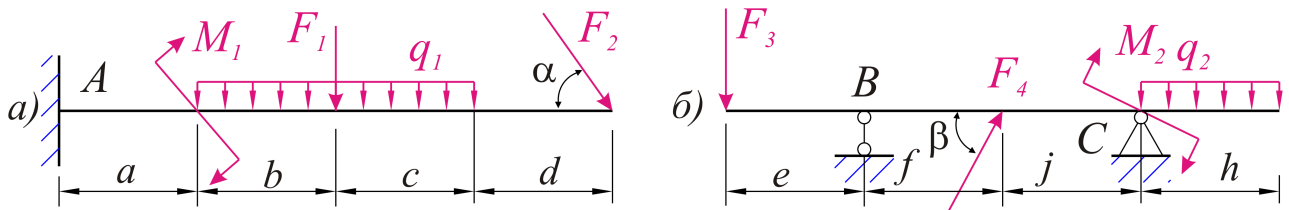
Вариант №21



Вариант №22

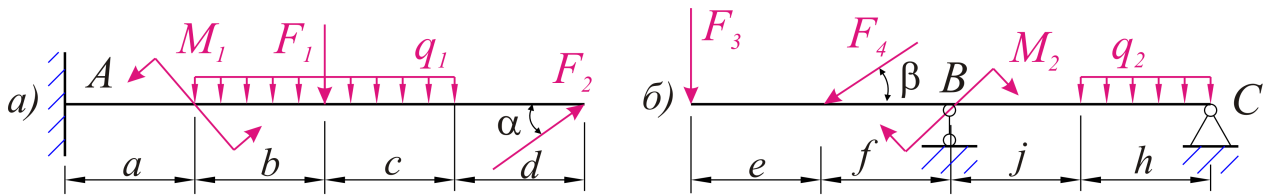


Вариант №23

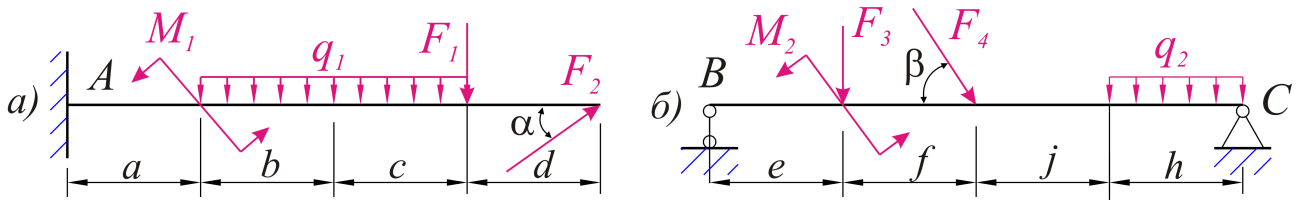


Вариант №24

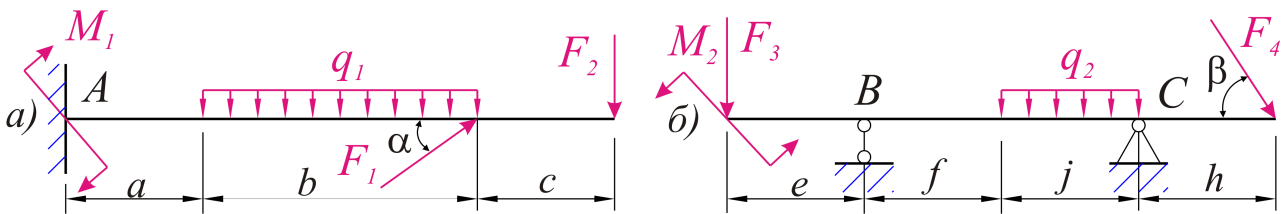
Рис. 23. Продолжение: Данные вариантов. Задание С1



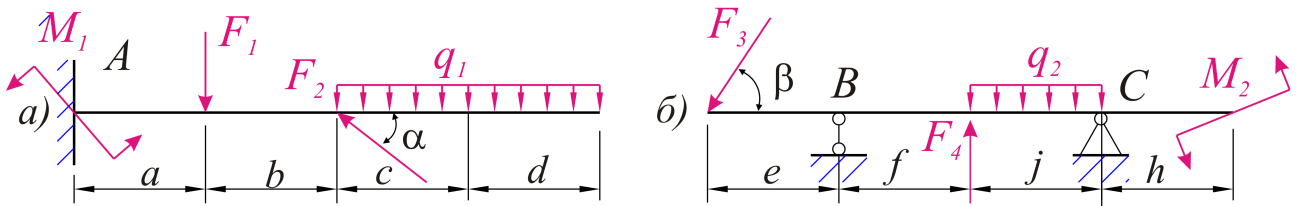
Вариант №25



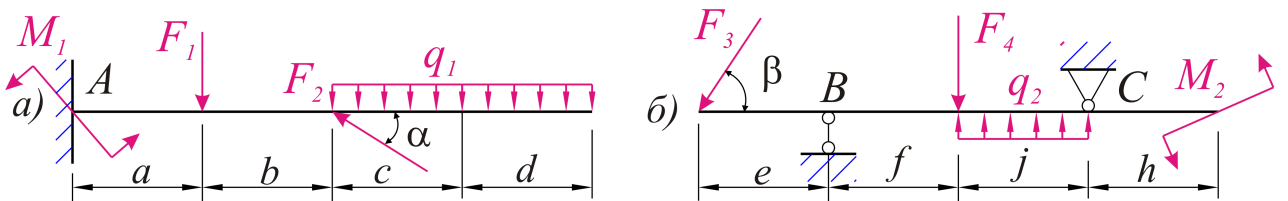
Вариант №26



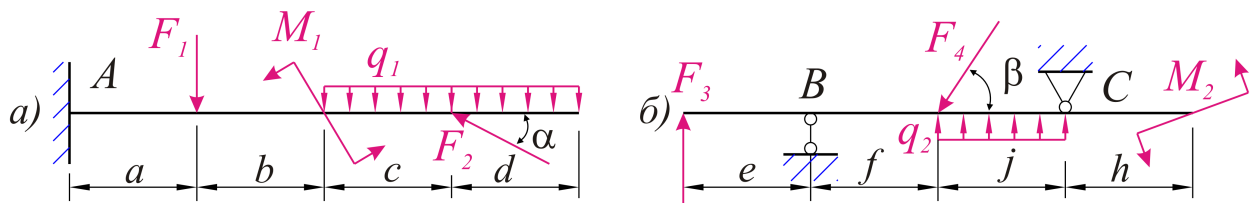
Вариант №27



Вариант №28



Вариант №29



Вариант №30

Рис. 23. Продолжение: Данные вариантов. Задание С1

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ БАЛОК, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»

Пример №1

ЗАДАНИЕ: Для балок, изображенных на схемах *a)* и *б)*, рис.24, определить полные опорные реакции.

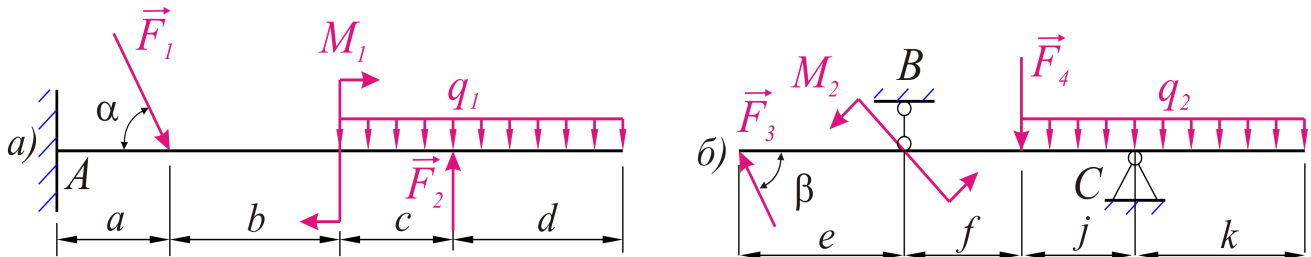


Рис.24. Исходные схемы балок

ДАННЫЕ: Выписываем расчётные данные в соответствии с номером варианта.

Таблица 2*

Данные к работе С1

№ вар.	Линейные размеры, м								Сила F , кН				Нагрузка q , Н/м		Момент M , Н*м		Угол, градус	
	a	b	c	d	e	f	j	k	F_1	F_2	F_3	F_4	M_1	M_2	q_1	q_2	α	β
X	1	2	2	3	2	1	2	1	10	15	20	5	10	10	2	5	60	60

РЕШЕНИЕ:

1) Рассмотрим схему *a)*. Элемент крепления балки реализован в виде жесткой заделки (опоры A), которая запрещает в плоскости чертежа перемещения вдоль осей x и y , а также поворот в этой плоскости. Поэтому полная реакция данной опоры может быть представлена в виде трех составляющих X_A , Y_A и реактивного момента M_A .

Приведём исходную схему, см. рис 24, *a*, к расчётной. Для этого:

- 1) Приложим подлежащие определению неизвестные реакции X_A , Y_A , M_A к жесткой заделке в точке A в направлении их предполагаемого действия, рис.25.
- 2) Заменяем наклонную силу F_1 на её горизонтальную и вертикальную составляющие F_{1x} и F_{1y} . Модули этих составляющих определим по формулам:

$$F_{1x} = F_1 \cos 60^\circ \Rightarrow F_{1x} = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}.$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 60^\circ \Rightarrow F_{1y} = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

- 3) Заменяем распределённую нагрузку q_1 её сосредоточенным

эквивалентом Q_1 : $Q_1 = q_1 \cdot (c+d) = 2 \cdot (2+3) = 10 \text{ кН}$.

4) Изобразим оси x и y , см. рис. 25.

Таким образом, от исходной схемы (рис. 24, а) мы перейдём к рассмотрению расчётной схемы, см. рис. 25.

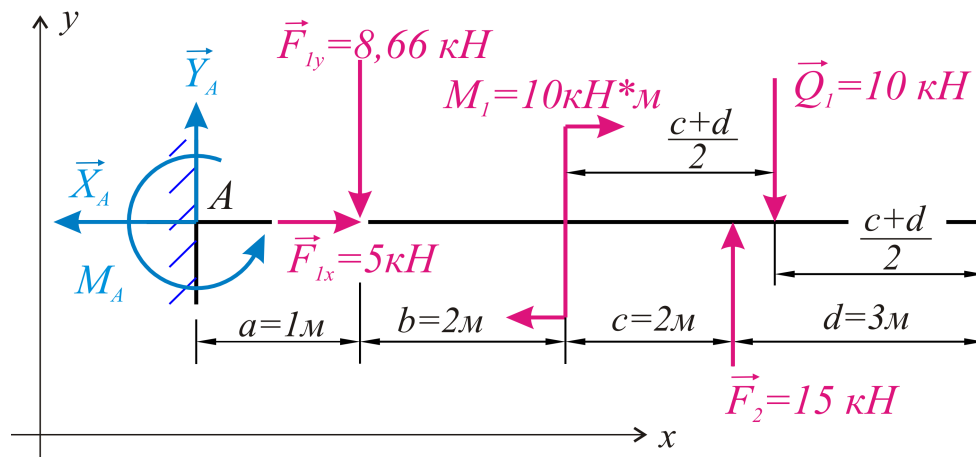


Рис.25. Расчетная схема для случая а)

Уравнения статического равновесия для произвольной системы сил в общем виде представляют собой:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Составим уравнения статического равновесия для схемы а), из которых и определим неизвестные реакции.

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \Rightarrow \\ -X_A + F_{1x} &= 0 \Rightarrow X_A = F_{1x} \Rightarrow X_A = 5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0 \Rightarrow \\ Y_A - F_{1y} - Q_1 + F_2 &= 0 \Rightarrow \\ Y_A = F_{1y} + Q_1 - F_2 &\Rightarrow Y_A = 8,66 + 10 - 15 \Rightarrow Y_A = 3,66 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0 \Rightarrow \\ M_A - F_{1y} \cdot a - M - Q_1 \cdot \left(a + b + \frac{c+d}{2}\right) + F_2 \cdot (a + b + c) &= 0 \Rightarrow \\ M_A = F_{1y} \cdot a + M + Q_1 \cdot \left(a + b + \frac{c+d}{2}\right) - F_2 \cdot (a + b + c) &\Rightarrow \\ M_A = 8,66 \cdot 1 + 10 + 10 \cdot (1 + 2 + 2,5) - 15 \cdot (1 + 2 + 2) &\Rightarrow M_A = 3,66 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Рассчитаем R_A по формуле:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5^2 + 3,66^2} \Rightarrow R_A = 6,2 \text{ кН}.$$

Направление полученных опорных реакций схемы а) представим на рис.26.

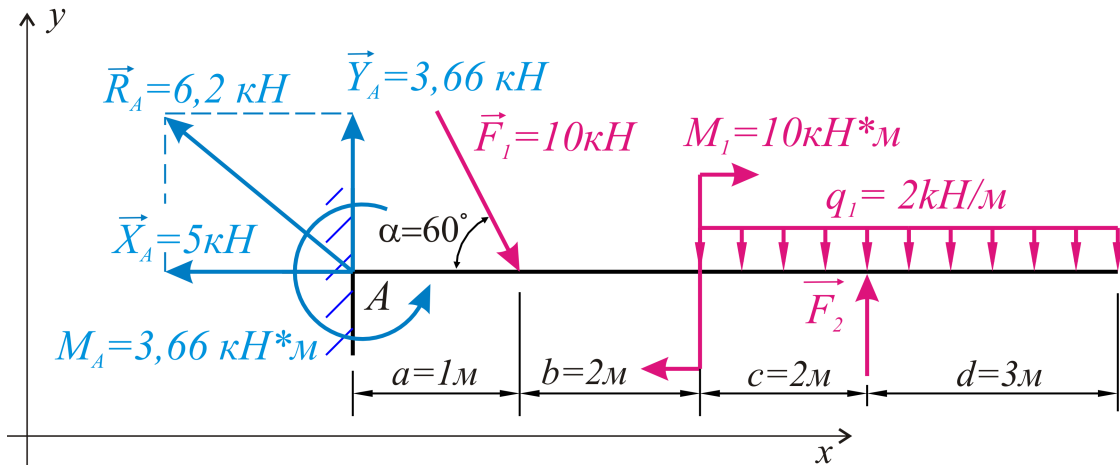


Рис.26. Модули и направления опорных реакций схемы а)

III) Рассмотрим схему, см. рис. 24, б. Крепление балки к опорной поверхности реализовано с помощью шарнирно-подвижной B и шарнирно-неподвижной C опор.

Приведём исходную схему (см. рис. 24, б) к расчётной. Для этого:

- 1) Приложим подлежащие определению неизвестные реакции R_B , X_C , Y_C к шарнирно-подвижной B и шарнирно-неподвижной опоре C соответственно.
- 2) Заменяем наклонную силу F_3 на её горизонтальную и вертикальную составляющие F_{3x} и F_{3y} . Модули этих составляющих определим по формулам:

$$F_{3x} = F_3 \cos 60^\circ \Rightarrow F_{3x} = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ kH}.$$

$$F_{3y} = F_3 \sin 60^\circ \Rightarrow F_{3y} = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ kH}.$$

- 3) Заменяем распределённую нагрузку q_2 её сосредоточенным эквивалентом Q_2 : $Q_2 = q_2 \cdot (j+k) = 5 \cdot (2+1) = 15 \text{ kH}$.
- 4) Изобразим оси x и y .

Таким образом, от исходной схемы (см. рис. 24, б) мы перейдём к рассмотрению расчётной схемы, рис.27.

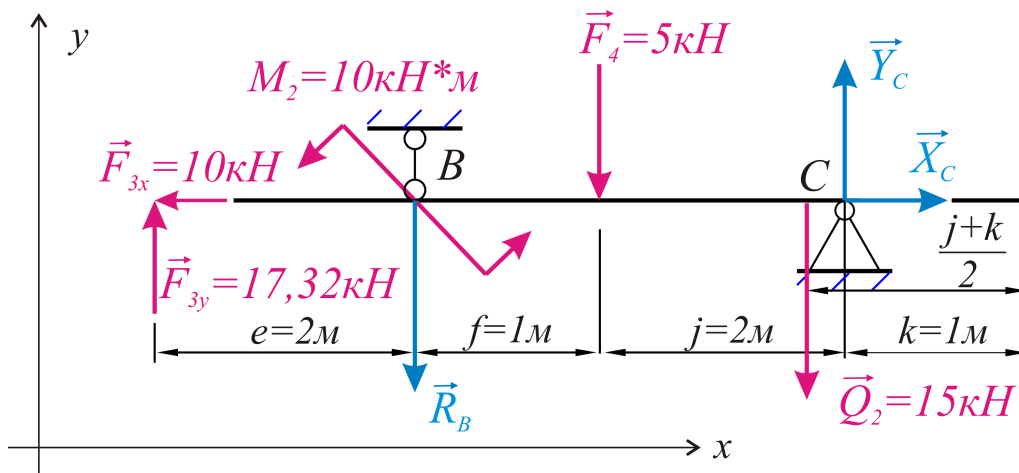


Рис.27. Расчетная схема для случая б)

Уравнения статического равновесия для произвольной системы сил в общем виде представим как:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_B(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum M_C(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum X &= 0 \text{ и } \sum Y = 0 \left(\begin{array}{l} \text{уравнение} \\ \text{проверки} \end{array} \right) \end{aligned} \right\}.$$

Составим уравнения статического равновесия для схемы б), из которых и определим неизвестные реакции.

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow$$

$$-F_{3y} \cdot e + M_2 - F_4 \cdot f - Q_2 \cdot \left(f + \frac{j+k}{2} \right) + Y_C \cdot (f+j) = 0 \Rightarrow$$

$$Y_C = \frac{F_{3y} \cdot e - M_2 + F_4 \cdot f + Q_2 \cdot \left(f + \frac{j+k}{2} \right)}{f+j} = \frac{17,32 \cdot 2 - 10 + 5 \cdot 1 + 15 \cdot \left(1 + \frac{2+1}{2} \right)}{1+2} \Rightarrow$$

$$Y_C = 22,38 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow -F_{3y} \cdot (e+f+j) + M_2 + R_B \cdot (f+j) + F_4 \cdot j + Q_2 \cdot \left(j - \frac{j+k}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{F_{3y} \cdot (e+f+j) - M_2 - F_4 \cdot j - Q_2 \cdot \left(j - \frac{j+k}{2} \right)}{f+j} = \frac{17,32(2+1+2) - 10 - 5 \cdot 2 - 15 \cdot \left(2 - \frac{2+1}{2} \right)}{1+2} \Rightarrow$$

$$R_B = 19,7 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow -F_{3x} + X_C = 0 \Rightarrow X_C = F_{3x} \Rightarrow X_C = 10 \text{ кН}.$$

Уравнение проверки $\sum Y = 0 \Rightarrow$

$$F_{3y} - R_B - F_4 - Q_2 + Y_C = 0 \Rightarrow 17,32 - 19,7 - 5 - 15 + 22,38 = 0. \text{ Истинно.}$$

Рассчитаем R_C по формуле: $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{10^2 + 22,38^2} \Rightarrow R_C = 24,51 \text{ кН}.$

Направление полученных опорных реакций схемы б) покажем на рис.28.

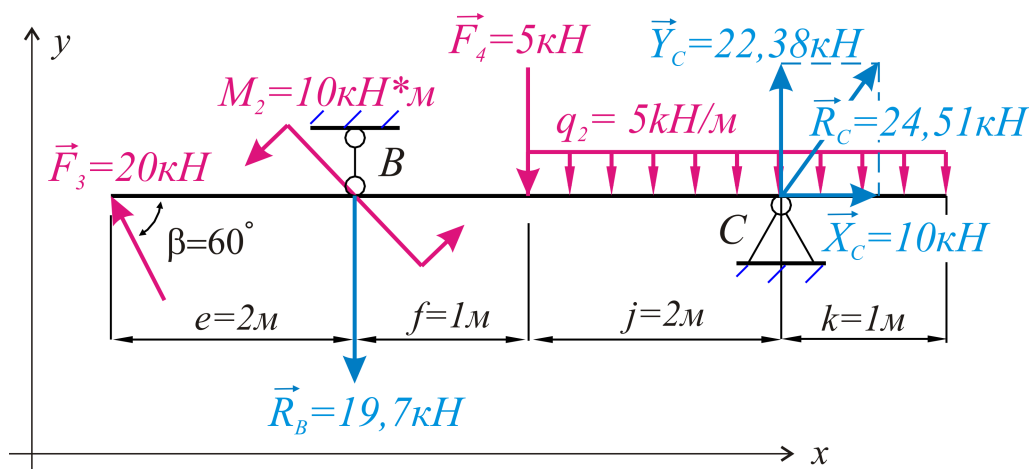


Рис. 28. Модули и направления опорных реакций схемы б)

Представим результаты расчёта в виде таблицы:

Таблица 2**

Результаты расчёта

Реакция	$R_A,$ кН	$M_A,$ кН*м	$R_B,$ кН	$R_C,$ кН
Модуль	6,2	3,66	19,7	24,51

ЗАДАНИЕ К РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ПЛОСКИХ РАМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»(С2)

Постановка задачи

К жесткой шарнирно-опертой статически определимой раме, показанной на рис.29, приложена плоская произвольная система сил, включающая в себя сосредоточенный момент M , распределённую нагрузку интенсивностью q и вес груза массой m , передающегося на раму посредством гибкой нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок O .

С учетом способа крепления балки с опорной поверхностью и исходя из условий статического равновесия определить модули и направления реакций связей \vec{R}_A, \vec{R}_B .

Указания

Расчетно-графическая работа С2 рассматривает равновесие тела под действием произвольной системы сил.

При определении опорных реакций целесообразно упростить исходную схему, заменяя распределенную нагрузку её сосредоточенным эквивалентом.

Применяя принцип освобожденности, отбросить гибкую связь, заменив её действие силой натяжения T .

Трением на блоке O пренебречь.

Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Результаты расчёта представить в виде таблицы 3.

Данные к расчету приведены в табл.4 и представлены на рис.29.

Таблица 3

Результаты расчёта

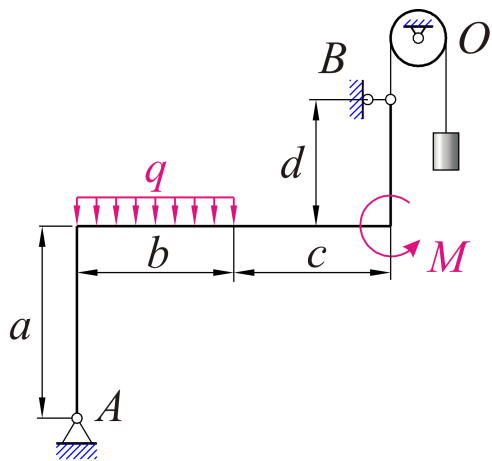
Реакция	$R_A, \text{кН}$	$R_B, \text{кН}$
Модуль		

ДАННЫЕ ВАРИАНТОВ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ (С2)

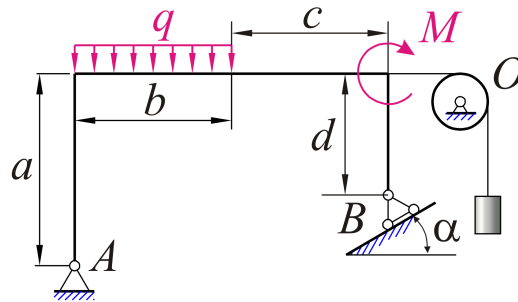
Таблица 4

Данные к работе С2

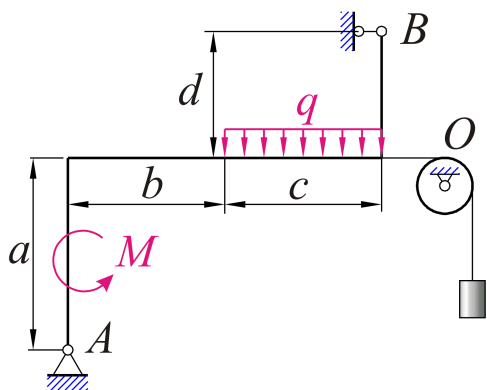
Номер варианта	Длина, м				Момент M , $кН*м$	Нагрузка q , $кН/м$	Масса груза, $кг$	Угол α , $градус$
	a	b	c	d				
1	1	2	3	4	10	2	100	-
2	4	3	2	1	15	3	200	45
3	3	2	4	1	5	4	300	-
4	1	4	3	2	20	5	400	30
5	2	2	3	4	12	6	500	-
6	4	3	2	2	4	2	100	30
7	3	3	2	2	8	3	200	30
8	2	1	4	4	6	4	300	-
9	1	2	4	3	7	5	400	30
10	2	3	1	4	2	6	500	-
11	1	2	3	4	10	2	100	45
12	4	3	2	1	15	3	200	-
13	3	2	4	1	5	4	300	-
14	1	4	3	2	20	5	400	45
15	2	2	3	4	12	6	500	-
16	4	3	2	2	4	2	100	30
17	3	3	2	2	8	3	200	-
18	2	1	4	4	6	4	300	30
19	1	2	4	3	7	5	400	60
20	2	3	1	4	2	6	500	-
21	1	2	3	4	10	2	100	30
22	4	3	2	1	15	3	200	30
23	3	2	4	1	5	4	300	45
24	1	4	3	2	20	5	400	30
25	2	2	3	4	12	6	500	-
26	4	3	2	2	4	2	100	30
27	3	3	2	2	8	3	200	-
28	2	1	4	4	6	4	300	30
29	1	2	4	3	7	5	400	-
30	2	3	1	4	2	6	500	60



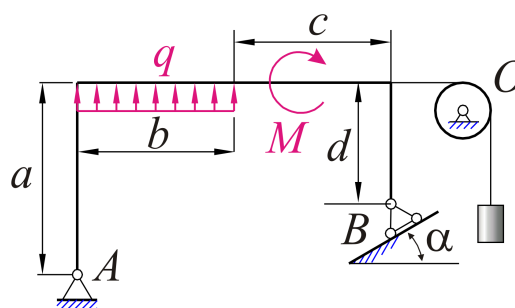
Вариант 1



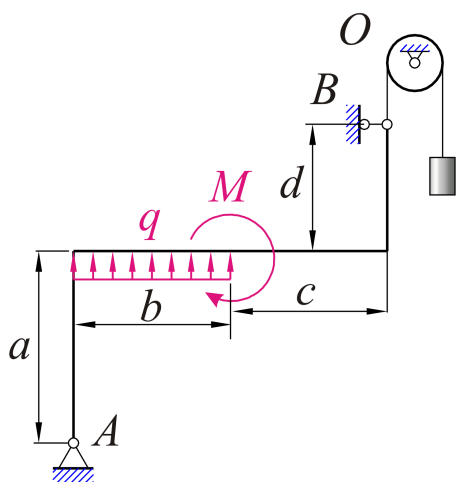
Вариант 2



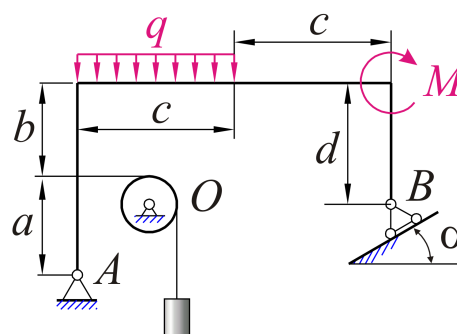
Вариант 3



Вариант 4

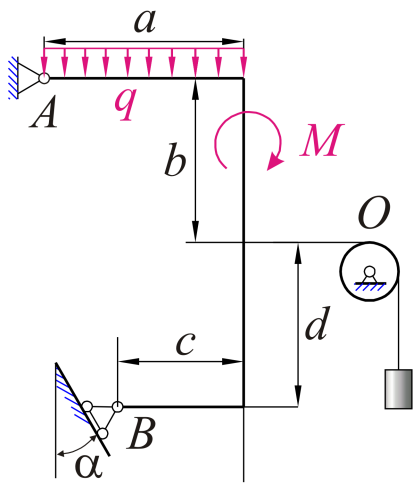


Вариант 5

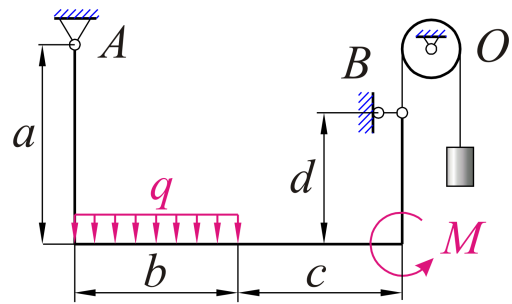


Вариант 6

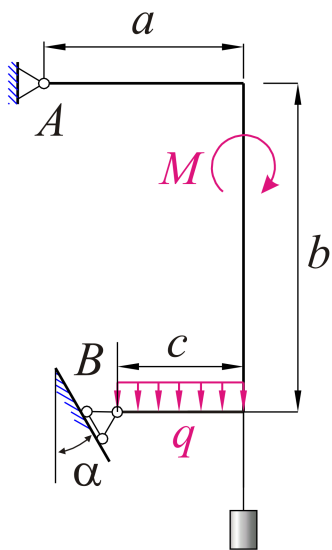
Рис.29. Данные вариантов. Задание С2



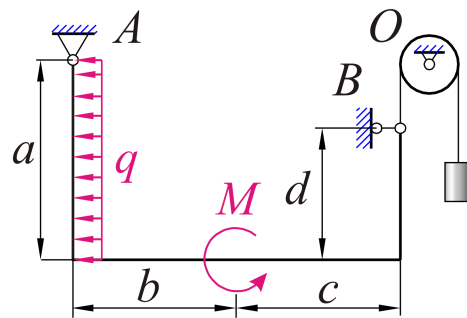
Вариант 7



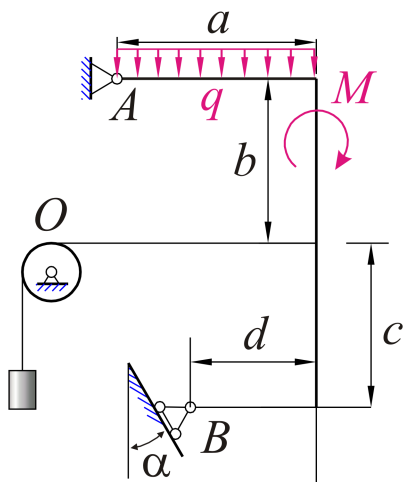
Вариант 8



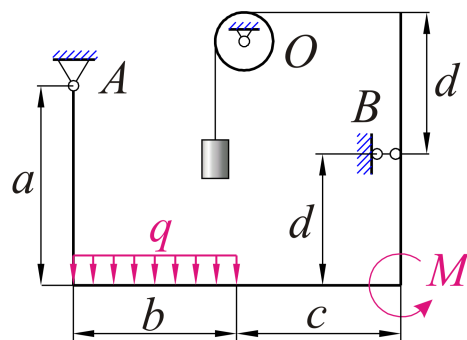
Вариант 9



Вариант 10

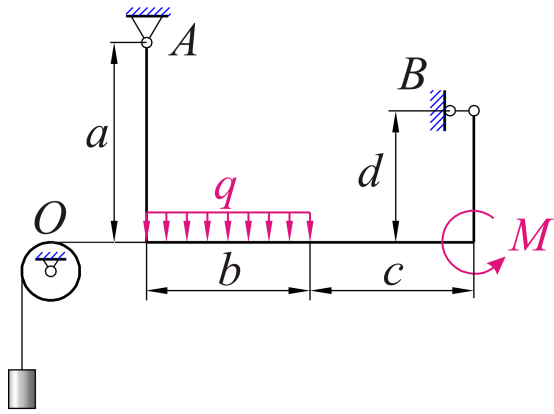


Вариант 11

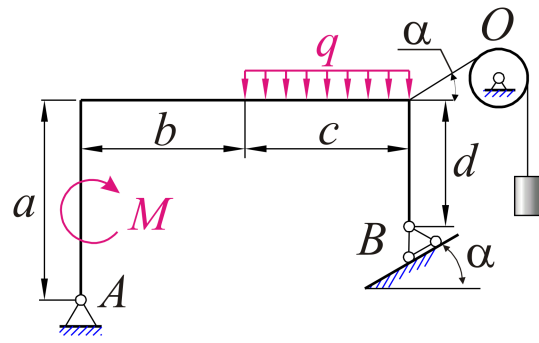


Вариант 12

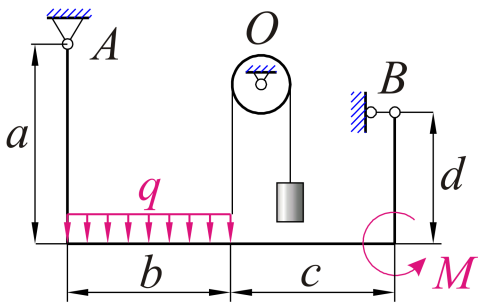
Рис. 29. Продолжение: Данные вариантов. Задание С2



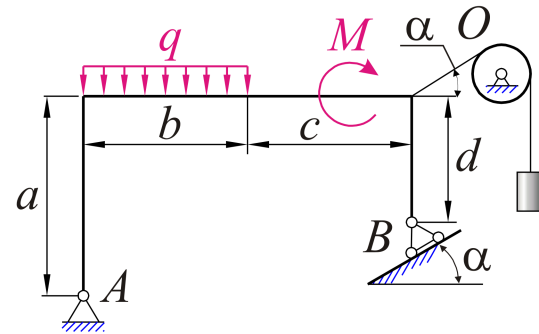
Вариант 13



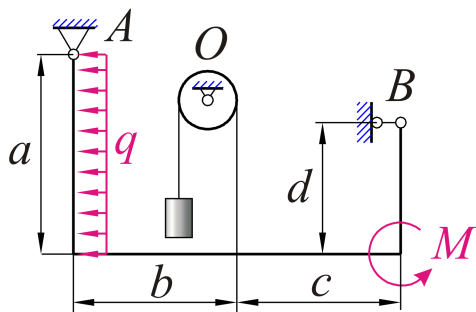
Вариант 14



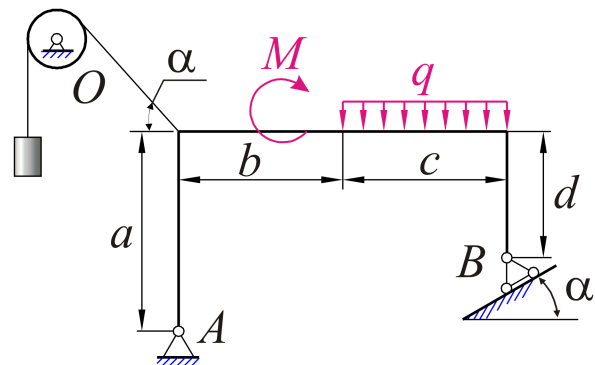
Вариант 15



Вариант 16

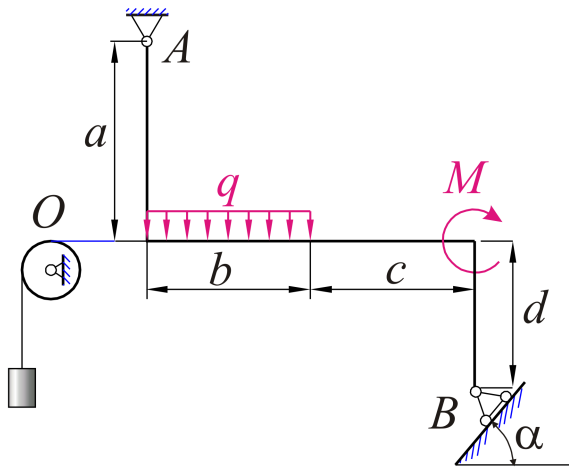


Вариант 17

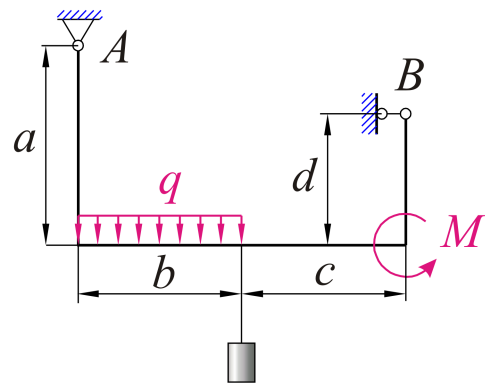


Вариант 18

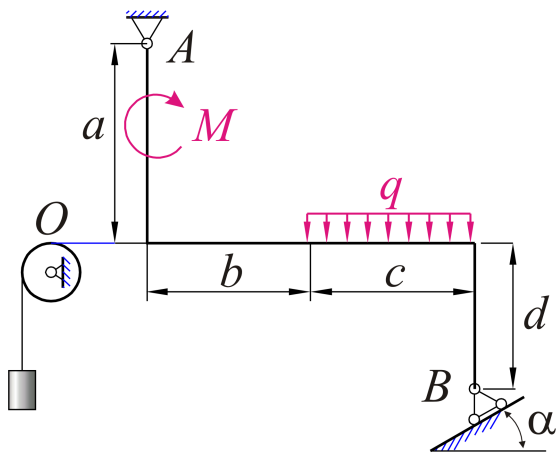
Рис. 29. Продолжение: Данные вариантов. Задание С2



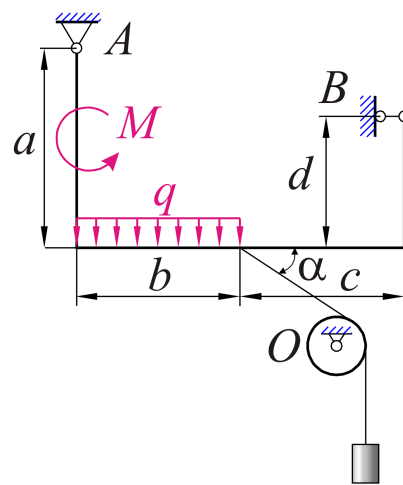
Вариант 19



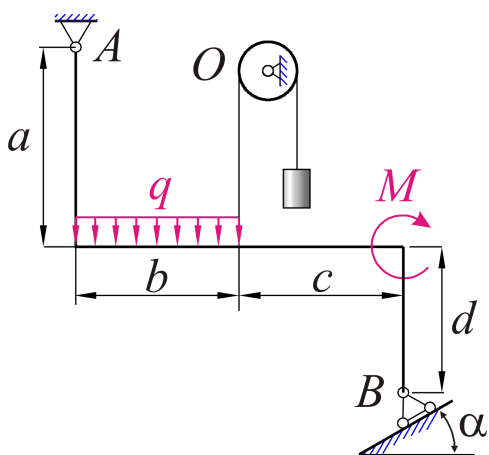
Вариант 20



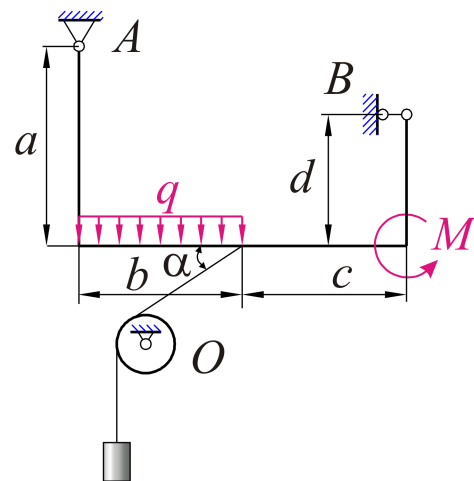
Вариант 21



Вариант 22

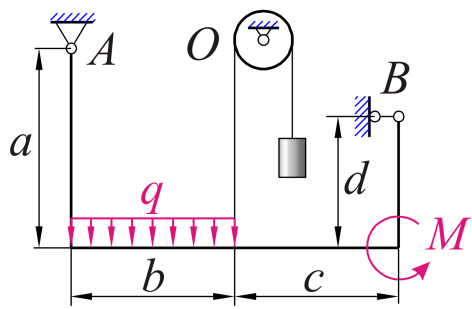


Вариант 23

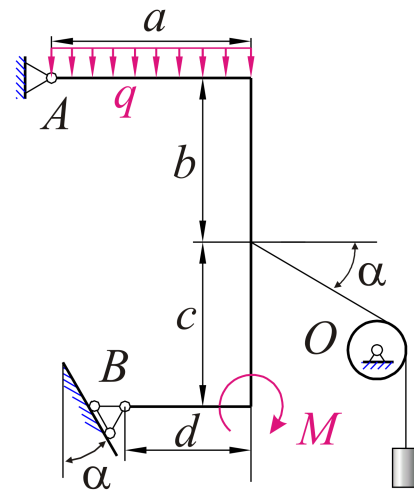


Вариант 24

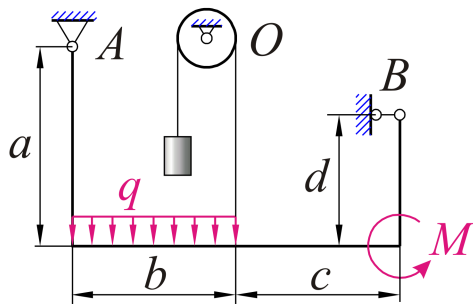
Рис. 29. Продолжение: Данные вариантов. Задание С2



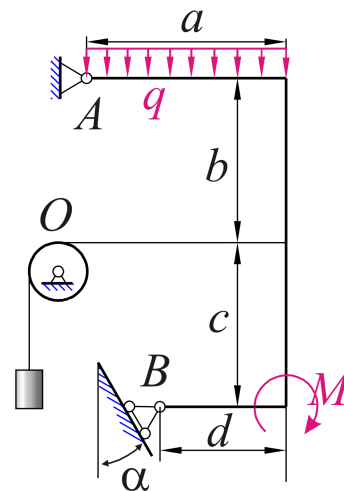
Вариант 25



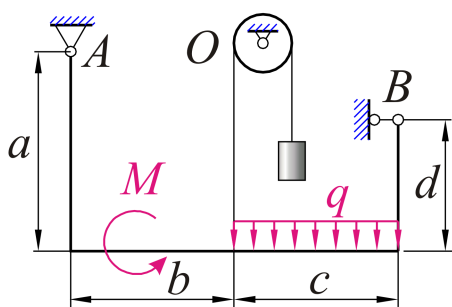
Вариант 26



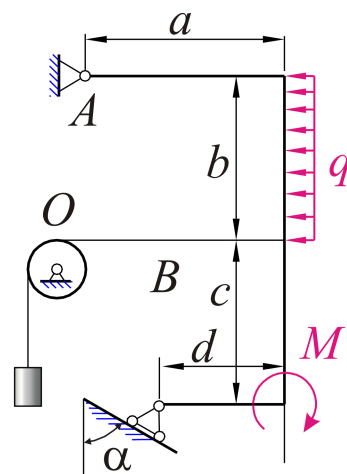
Вариант 27



Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30

Рис. 29. Продолжение: Данные вариантов. Задание С2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ПЛОСКИХ РАМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ»(С2)

Пример №2

ЗАДАНИЕ: Для рамы, изображенной на рис.30, определить полные опорные реакции.

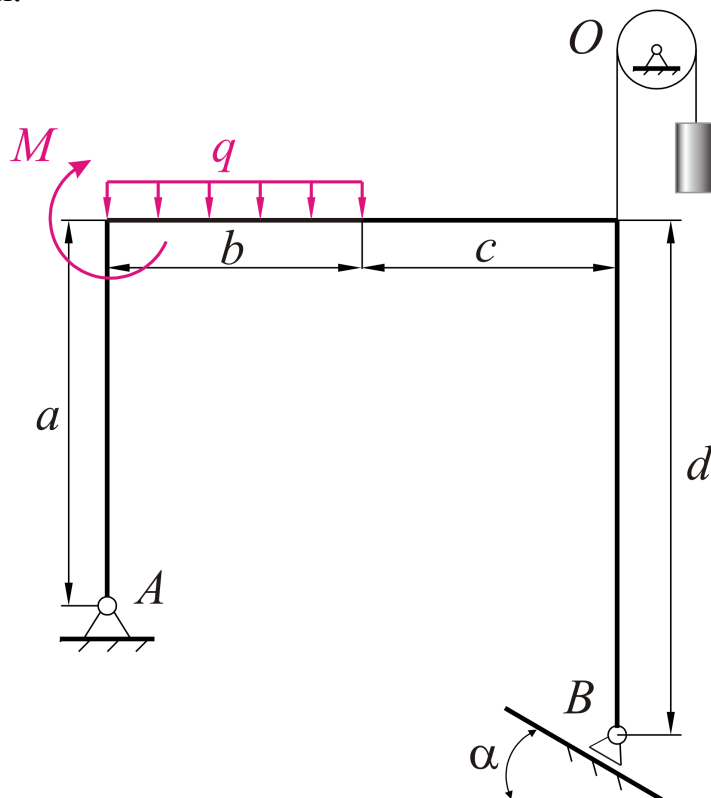


Рис. 30. Исходная схема к примеру №2

ДАННЫЕ: Выписываем расчётные данные в соответствии с номером варианта.

Таблица 4

Данные к работе С2

Номер варианта	Длина, м				Момент M , кН*м	Нагрузка q , кН/м	Масса груза, кг	Угол α , градус
	a	b	c	d				
X	3	2	2	4	10	5	200	30

РЕШЕНИЕ: Приведём исходную схему к расчетной. Для этого:

- 1) Приложим подлежащие определению неизвестные реакции X_A , Y_A , R_B к соответствующим опорам в направлении их предполагаемого действия, рис.31.
- 2) Заменяем распределённую нагрузку q её сосредоточенным эквивалентом Q : $Q = q \cdot b = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН}$.
- 3) Отбросим гибкую связь, заменив её действие силой натяжения T :

$$T = mg = 200 \cdot 10 \Rightarrow T = 2 \text{ kH}.$$

4) Изобразим оси x и y , рис. 31.

5) Определим положение вспомогательной точки C - точки пересечения линии действия горизонтальной составляющей реакции опоры A с осью U , проведенной по линии действия полной реакции опоры B - R_B .
 Расстояние $e = (d - a) \cdot \text{tg } \alpha \Rightarrow e = (4 - 3) \cdot \text{tg } 30^\circ = 0,57735 \text{ м}$.

Таким образом, от исходной схемы рис. 28 мы перейдем к рассмотрению расчётной схемы, см. рис.29.

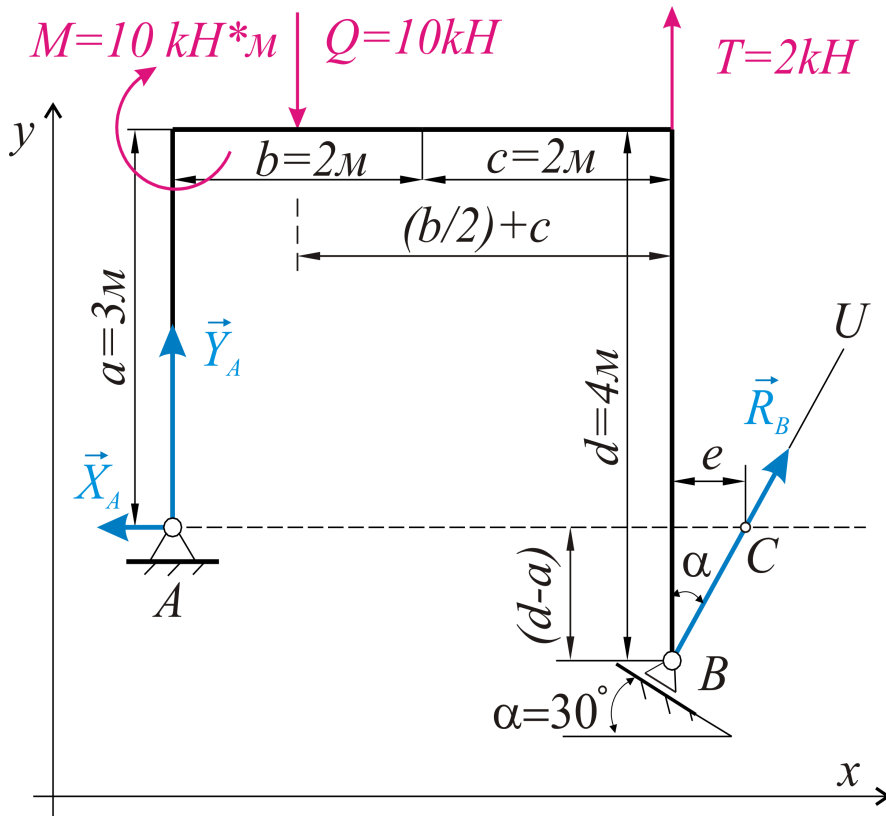


Рис. 31. Расчётная схема к примеру №2

Составим уравнение равновесия относительно вспомогательной точки C :

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow$$

$$-Y_A \cdot (b + c + e) - M + Q \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right) - T \cdot e = 0 \Rightarrow$$

$$Y_A = \frac{-M + Q \cdot \left(\frac{b}{2} + c + e\right) - T \cdot e}{b + c + e} = \frac{-10 + 10 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2 + 0,57735\right) - 2 \cdot 0,57735}{2 + 2 + 0,57735} \Rightarrow$$

$$Y_A \approx 5,38 \text{ kH}.$$

Составим уравнение равновесия относительно точки B :

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow$$

$$X_A \cdot (d - a) - Y_A \cdot (b + c) - M + Q \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right) = 0 \Rightarrow$$

$$X_A = \frac{Y_A \cdot (b+c) + M - Q \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right)}{d-a} = \frac{5,38 \cdot (2+2) + 10 - 10 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2\right)}{4-3} \Rightarrow$$

$$X_A \approx 1,54 \text{ кН}.$$

Составим уравнение равновесия относительно оси x .
 $\sum X = 0 \Rightarrow$

$$-X_A + R_B \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_B = \frac{1,54}{\sin 30^\circ} \Rightarrow R_B \approx 3,07 \text{ кН}.$$

Выполним проверку: $\sum Y = 0 \Rightarrow$

$$Y_A - Q + T + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow 5,38 - 10 + 2 + 3,07 \cdot 0,866 \approx 0. \text{ Истинно.}$$

Определим полную реакцию опоры A по формуле:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{1,54^2 + 5,38^2} \Rightarrow R_A \approx 5,69 \text{ кН}.$$

Направления реакций изобразим на рис. 32.

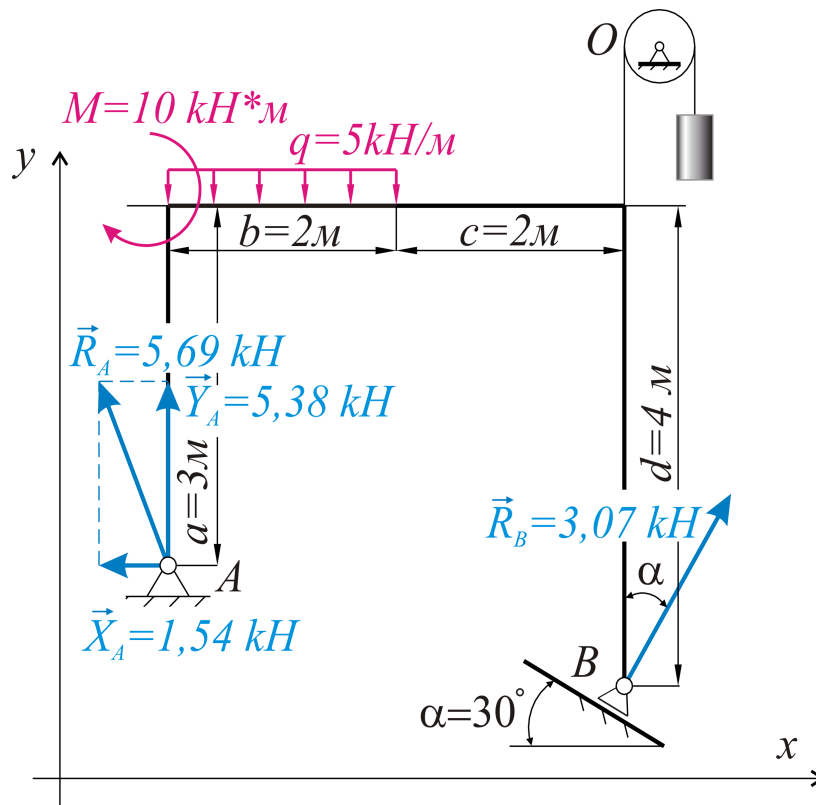


Рис.32. Модули и направления реакций

Расчётные данные представим в виде таблицы:

Таблица 4*

Результаты расчёта

Реакция	R_A , кН	R_B , кН
Модуль	5,69	3,07

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ И ПОЛОЖЕНИЙ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТЕЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ»(С3)

Постановка задачи

Твердое тело состоит из тонкой фигурной пластины (рис. 33, *a*) или системы жестко связанных тонких стержней в виде прямоугольного треугольника и тонкого однородного кольца радиуса r (рис. 33, *b*), расположенных в одной плоскости. Согласно данным варианта, необходимо:

- 1) Определить статические моменты для случая *a*) и случая *b*) относительно осей $xу$.
- 2) Используя свойства статического момента, определить положение центра тяжести (точки C) для случая *a*) и центра тяжести (точки K) случая *b*) в системе координат $xу$.
- 3) Выполнить графическую часть для случая *a*) и случая *b*), изобразив в выбранном масштабе данные варианта, указав необходимые размеры, используемые в расчете, а также положение соответствующего центра тяжести.

Указания

Расчетно-графическая работа С3 рассматривает определение одной из важнейших геометрических характеристик плоских сечений – статического момента, а также направлена на приобретение навыков в определении положений центров тяжести плоского тела.

При решении задачи используется свойство статических моментов, заключающееся в том, что статический момент сложного плоского тела относительно произвольной оси может быть представлен в виде суммы статических моментов относительно этой же оси более простых в геометрическом плане элементов, составляющих данное тело. Также при рассмотрении фигурных пластин с отверстиями целесообразно использовать свойство, согласно которому статический момент может быть представлен как разность статических моментов общего контура и площади отверстий, взятых относительно одной и той же оси.

При определении координат центра тяжести $K(x_K; y_K)$ тонкого однородного стержня, лежащего в плоскости Oxy с известными координатами начала $(x_1; y_1)$ и конца $(x_2; y_2)$, можно воспользоваться формулами, согласно которым:

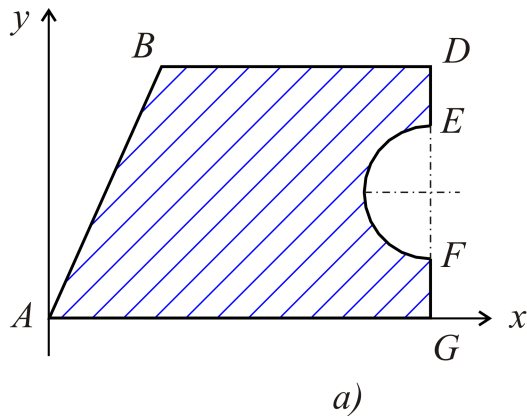
$$x_K = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad (*)$$

$$y_K = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (**)$$

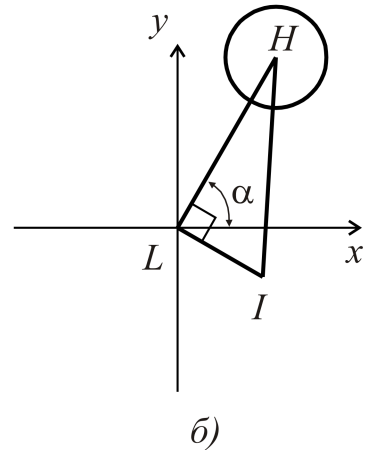
При расчёте статических моментов обязательно учитывается специфика их определения при рассмотрении тонких пластин и тонких стержней.

Данные к расчету представлены на рис.33.

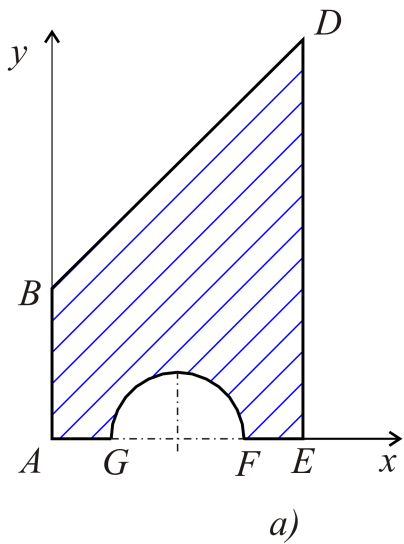
ДАННЫЕ ВАРИАНТОВ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ (С3)



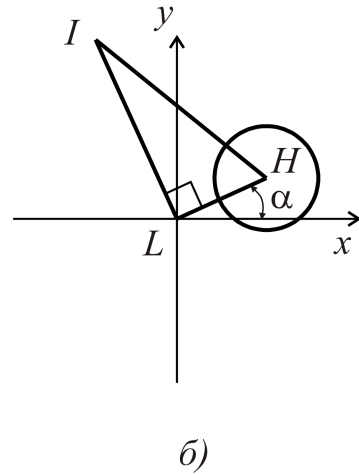
$BD=5\text{ см};$
 $DE=2\text{ см};$
 $EF=3\text{ см};$
 $FG=2\text{ см};$
 $GA=7\text{ см};$
 $LH=6\text{ см};$
 $HI=9\text{ см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=2\text{ см}.$



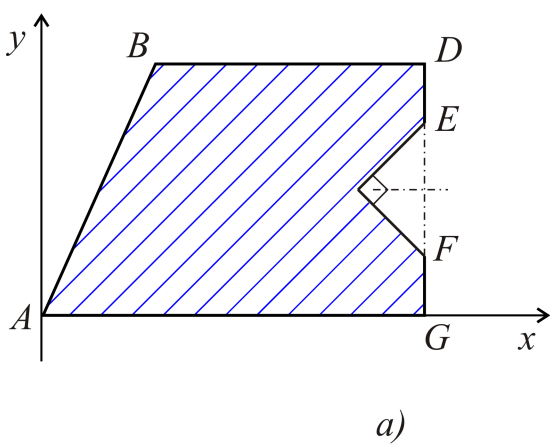
Вариант 1



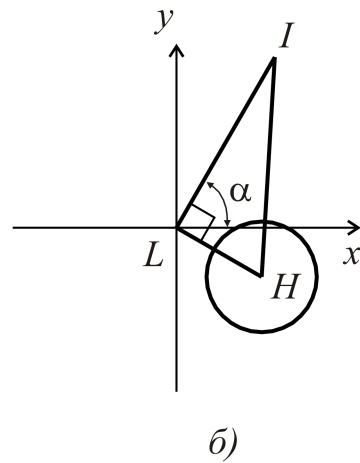
$AB=5\text{ см};$
 $DE=8\text{ см};$
 $EF=2\text{ см};$
 $FG=4\text{ см};$
 $GA=2\text{ см};$
 $LH=3\text{ см};$
 $HI=5\text{ см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=2\text{ см}.$



Вариант 2

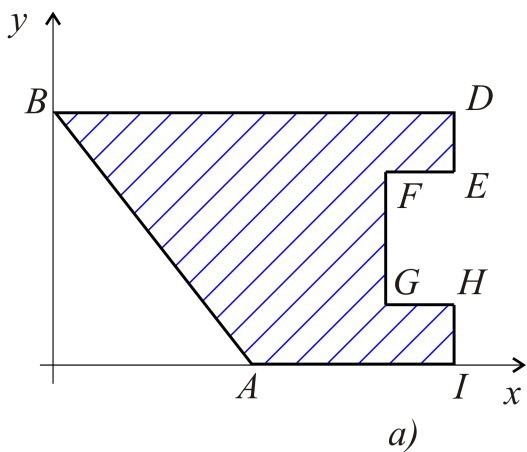


$BD=6\text{ см};$
 $DE=3\text{ см};$
 $EF=6\text{ см};$
 $FG=2\text{ см};$
 $GF=3\text{ см};$
 $LH=5\text{ см};$
 $HI=10\text{ см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=2\text{ см}.$

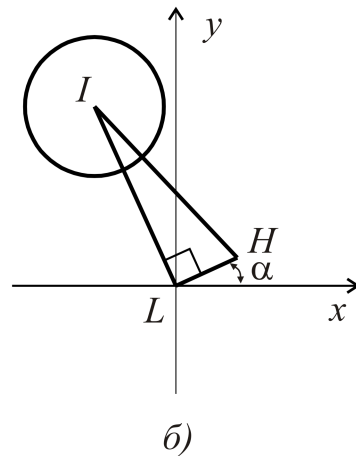


Вариант 3

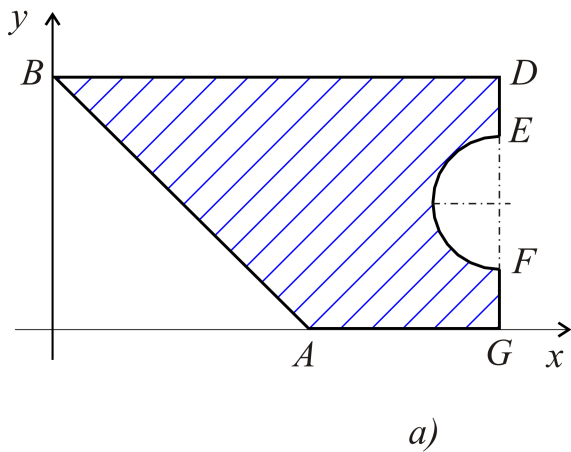
Рис. 33. Данные вариантов. Задание С3



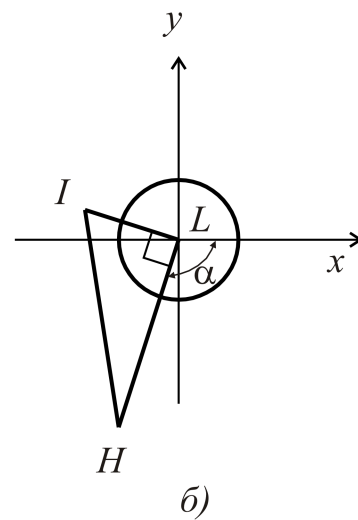
$BD=7\text{см};$
 $DE=1\text{см};$
 $EF=2\text{см};$
 $FG=4\text{см};$
 $GH=2\text{см};$
 $HI=1\text{см};$
 $IA=3\text{см};$
 $LH=3\text{см};$
 $IL=6\text{см};$
 $LI=9\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



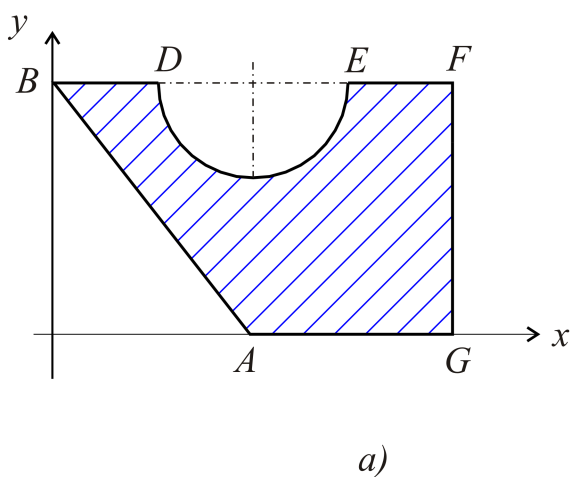
Вариант 4



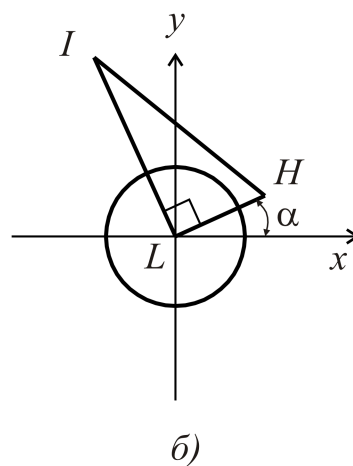
$BD=6\text{см};$
 $DE=1\text{см};$
 $EF=2\text{см};$
 $FG=1\text{см};$
 $GA=3\text{см};$
 $LH=5\text{см};$
 $LI=10\text{см};$
 $\alpha=120^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



Вариант 5

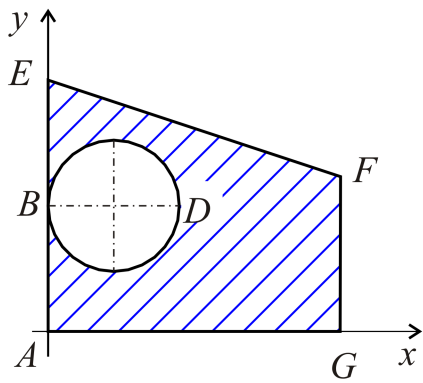


$BD=2\text{см};$
 $DE=4\text{см};$
 $EF=2\text{см};$
 $FG=5\text{см};$
 $GA=4\text{см};$
 $LH=5\text{см};$
 $LI=9\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=4\text{см}.$

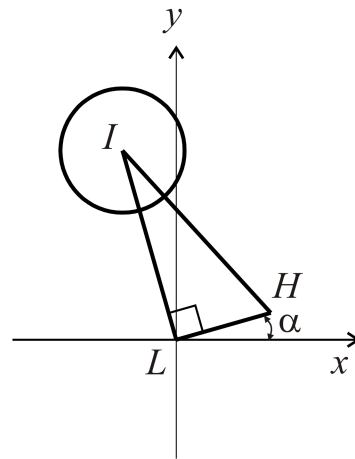


Вариант 6

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



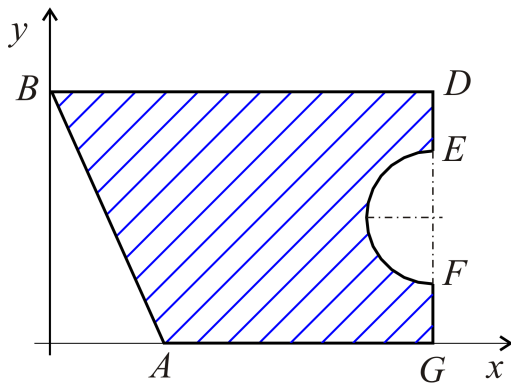
$AB=4\text{см};$
 $BD=3\text{см};$
 $BE=4\text{см};$
 $FG=7\text{см};$
 $GA=8\text{см};$
 $LH=3\text{см};$
 $HI=8\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=4\text{см}.$



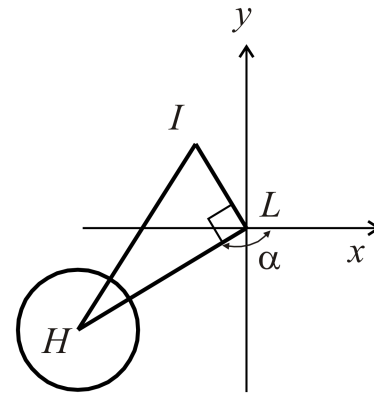
а)

б)

Вариант 7



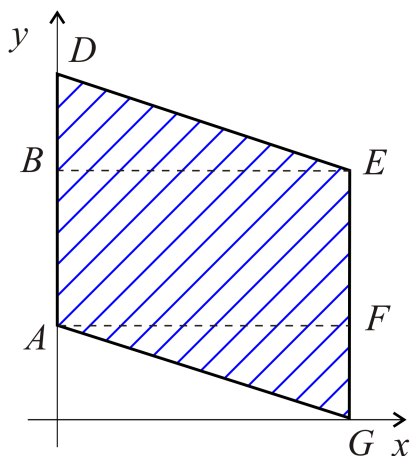
$BD=10\text{см};$
 $DE=2\text{см};$
 $EF=3\text{см};$
 $FG=2\text{см};$
 $GA=7\text{см};$
 $LH=10\text{см};$
 $HI=12\text{см};$
 $\alpha=150^\circ;$
 $r=4\text{см}.$



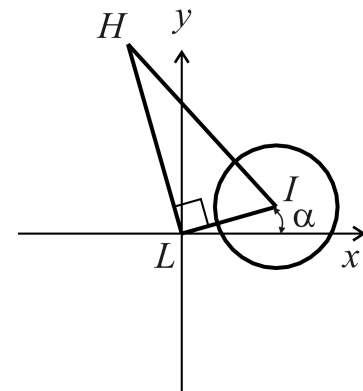
а)

б)

Вариант 8



$AB=4\text{ см};$
 $BD=3\text{см};$
 $BE=4\text{см};$
 $EF=4\text{см};$
 $FG=3\text{см};$
 $LH=5\text{см};$
 $HI=9\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=3\text{см}.$

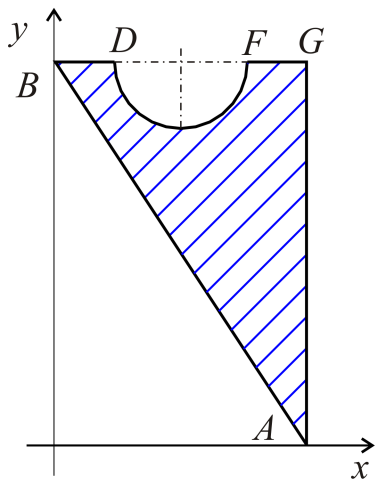


а)

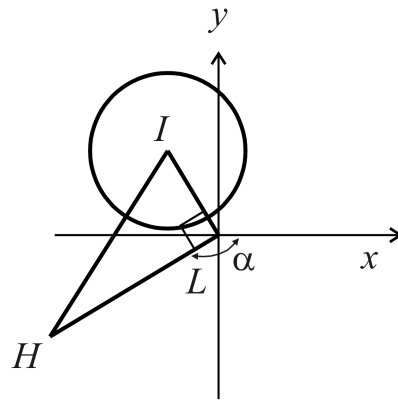
б)

Вариант 9

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



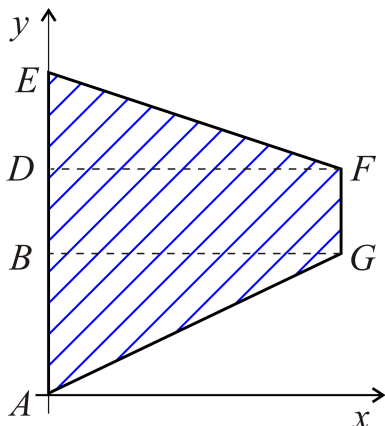
$BD=2\text{см};$
 $DF=4\text{см};$
 $FG=2\text{см};$
 $GA=6\text{см};$
 $LH=8\text{см};$
 $HI=12\text{см};$
 $\alpha=150^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



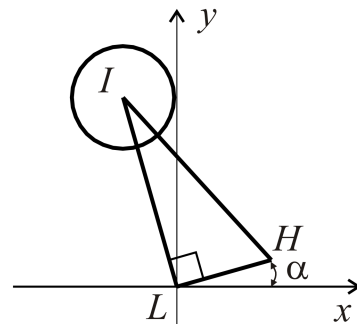
a)

б)

Вариант 10



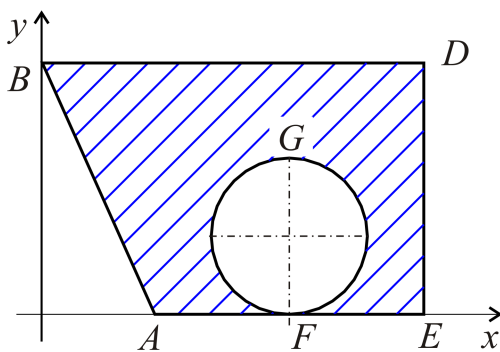
$AB=3\text{см};$
 $BD=1\text{см};$
 $DE=2\text{см};$
 $FG=1\text{см};$
 $LH=5\text{см};$
 $HI=8\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=1\text{см}.$



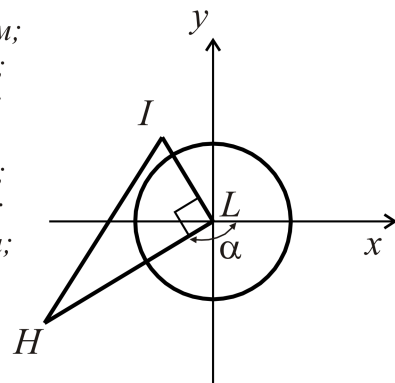
a)

б)

Вариант 11



$BD=10\text{см};$
 $DE=7\text{см};$
 $EF=3\text{см};$
 $FA=3\text{см};$
 $GF=2\text{см};$
 $LH=6\text{см};$
 $HI=10\text{см};$
 $\alpha=150^\circ;$
 $r=4\text{см}.$

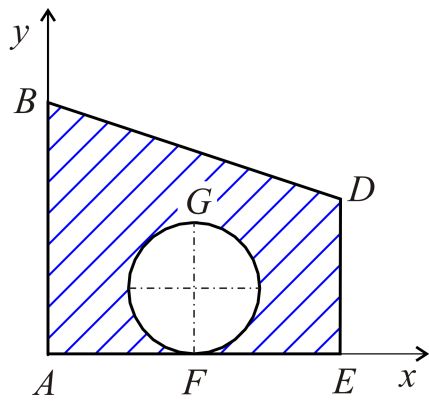


a)

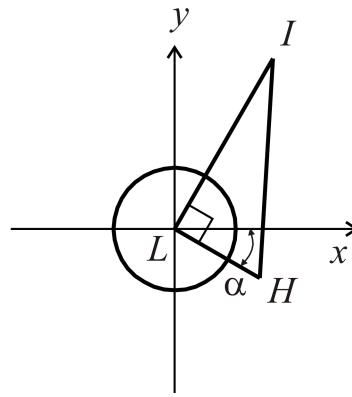
б)

Вариант 12

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



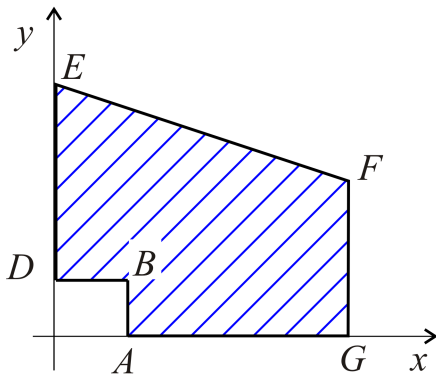
$AB=5\text{см};$
 $DE=4\text{см};$
 $EF=3\text{см};$
 $FG=2\text{см};$
 $GA=3\text{см};$
 $LH=5\text{см};$
 $HI=12\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



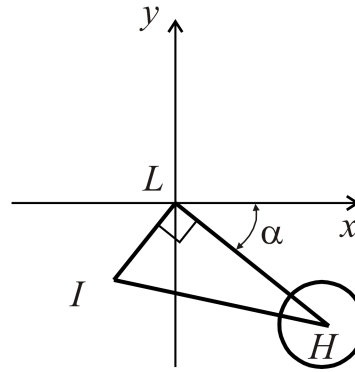
a)

б)

Вариант 13



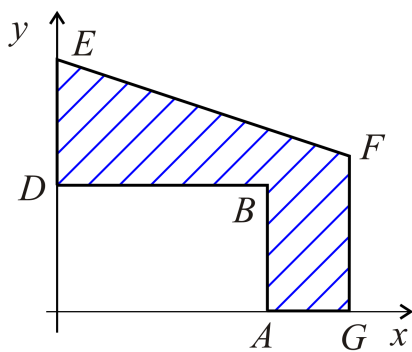
$AB=1\text{см};$
 $BD=2\text{см};$
 $DE=5\text{см};$
 $FG=5\text{см};$
 $GA=4\text{см};$
 $LH=10\text{см};$
 $HI=15\text{см};$
 $\alpha=45^\circ;$
 $r=4\text{см}.$



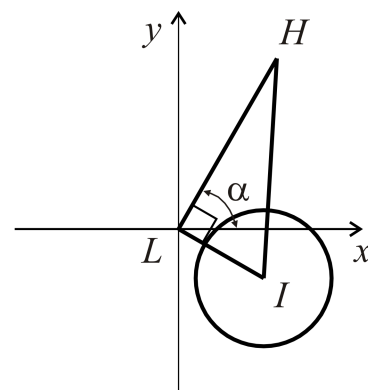
a)

б)

Вариант 14



$AB=4\text{см};$
 $BD=8\text{см};$
 $DE=4\text{см};$
 $FG=5\text{см};$
 $GA=2\text{см};$
 $LH=6\text{см};$
 $HI=10\text{ см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=3\text{см}.$

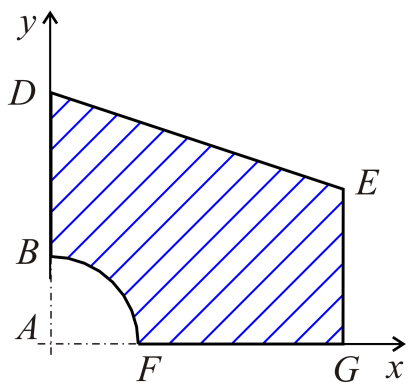


a)

б)

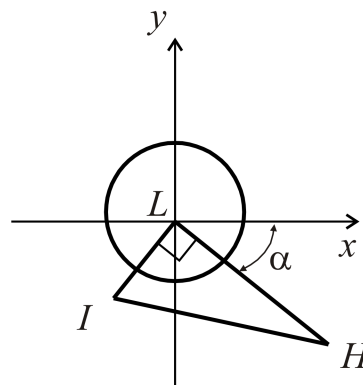
Вариант 15

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



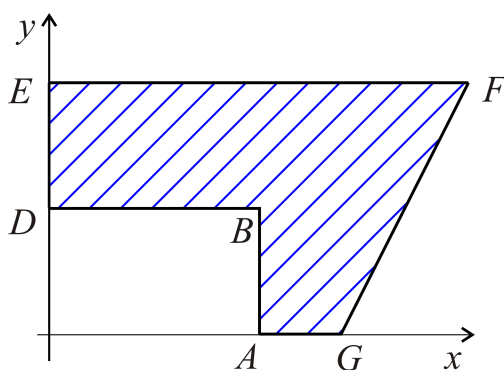
$AB=3\text{ см};$
 $BD=5\text{ см};$
 $EG=6\text{ см};$
 $FG=7\text{ см};$
 $FA=3\text{ см};$
 $LH=5\text{ см};$
 $HI=10\text{ см};$
 $\alpha=45^\circ;$
 $r=3\text{ см}.$

a)



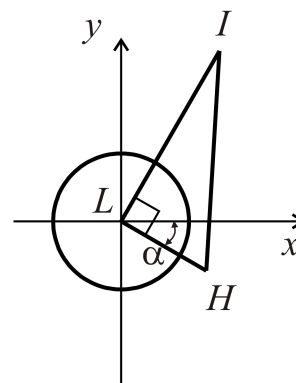
б)

Вариант 16



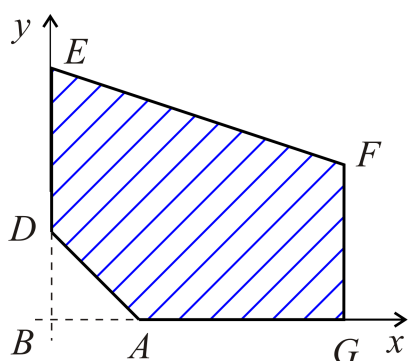
$AB=2\text{ см};$
 $BD=5\text{ см};$
 $DE=2\text{ см};$
 $EF=8\text{ см};$
 $GA=1\text{ см};$
 $LH=4\text{ см};$
 $HI=10\text{ см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=3\text{ см}.$

a)



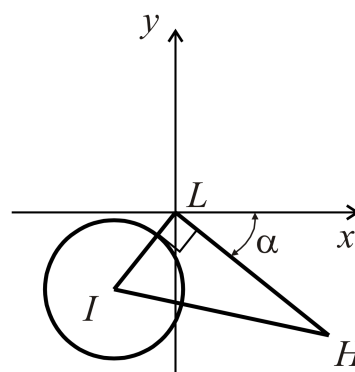
б)

Вариант 17



$AB=2\text{ см};$
 $BD=2\text{ см};$
 $DE=4\text{ см};$
 $FG=4\text{ см};$
 $GA=5\text{ см};$
 $LH=5\text{ см};$
 $HI=9\text{ см};$
 $\alpha=45^\circ;$
 $r=3\text{ см}.$

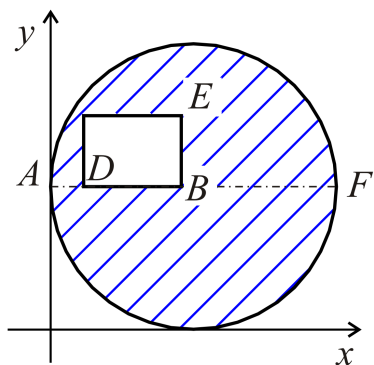
a)



б)

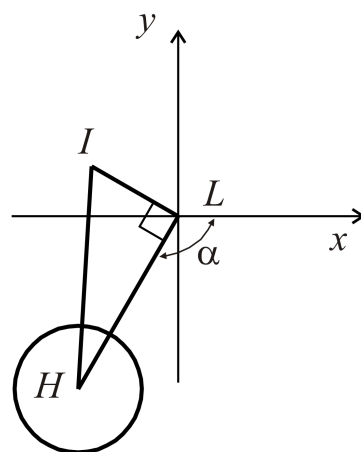
Вариант 18

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



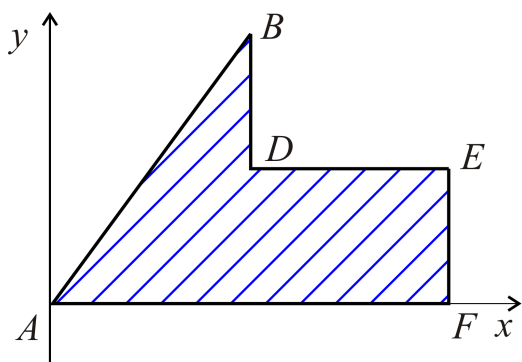
a)

$AF=10\text{см};$
 $BD=3\text{см};$
 $EB=2\text{см};$
 $BF=5\text{см};$
 $LH=10\text{см};$
 $HI=15\text{ см};$
 $\alpha=120^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



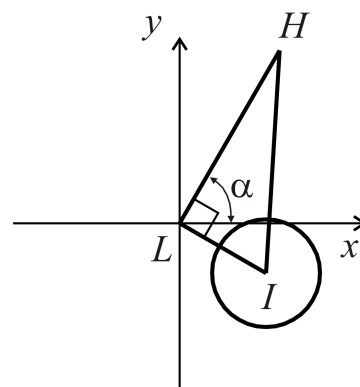
б)

Вариант 19



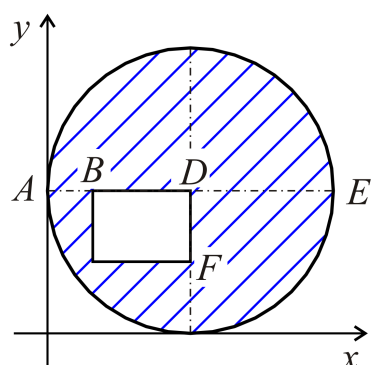
a)

$BD=2\text{см};$
 $DE=4\text{см};$
 $EF=3\text{см};$
 $FA=8\text{см};$
 $LH=8\text{см};$
 $HI=12\text{ см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=2\text{см}.$



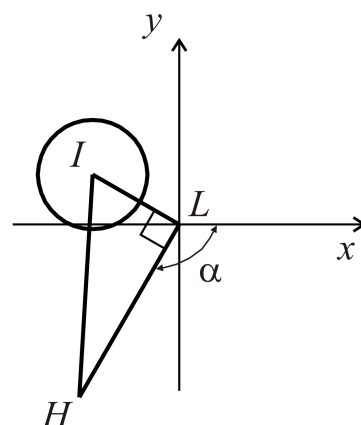
б)

Вариант 20



a)

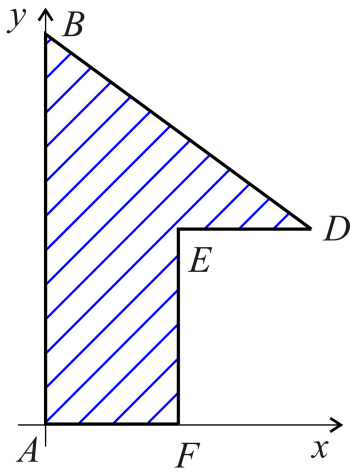
$AB=1\text{см};$
 $AE=10\text{см};$
 $DE=5\text{см};$
 $DF=3\text{см};$
 $LH=9\text{см};$
 $HI=12\text{см};$
 $\alpha=120^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



б)

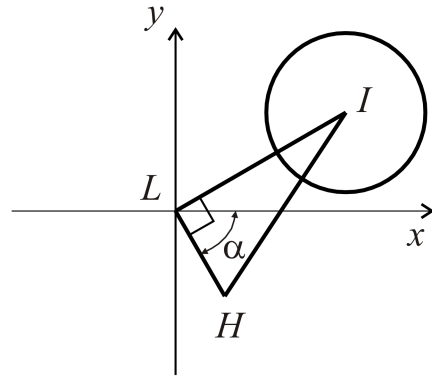
Вариант 21

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



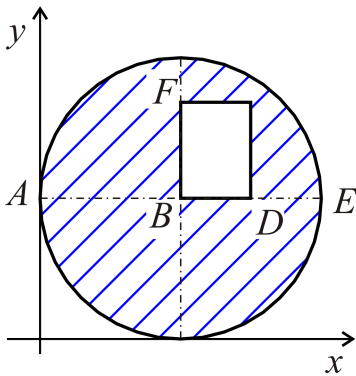
a)

$AB=10\text{см};$
 $DE=3\text{см};$
 $EF=5\text{см};$
 $FA=3\text{см};$
 $LH=6\text{см};$
 $HI=9\text{см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=2\text{см}.$



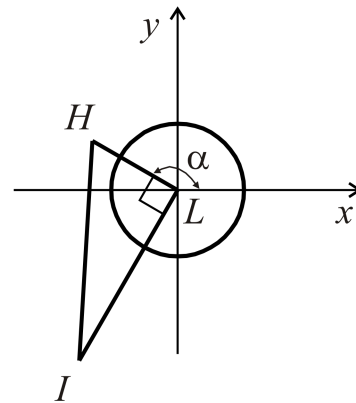
б)

Вариант 22



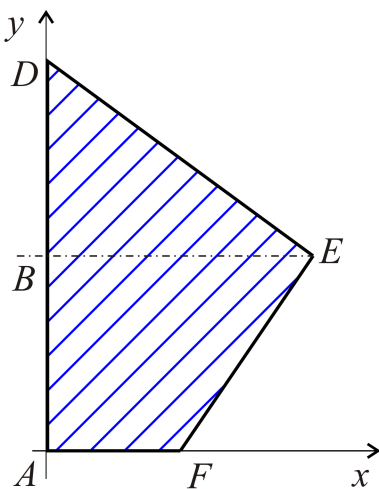
a)

$AB=5\text{см};$
 $BD=2\text{см};$
 $DE=3\text{см};$
 $EF=3\text{см};$
 $LH=4\text{см};$
 $HI=12\text{см};$
 $\alpha=150^\circ;$
 $r=2\text{см}.$



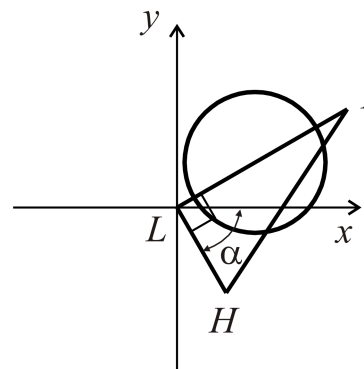
б)

Вариант 23



a)

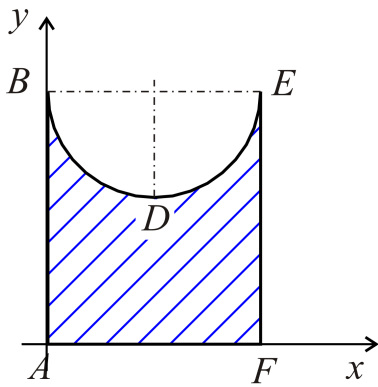
$AB=12\text{см};$
 $BD=3\text{см};$
 $BE=4\text{см};$
 $FA=2\text{см};$
 $LH=4\text{см};$
 $HI=9\text{см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=2\text{см}.$



б)

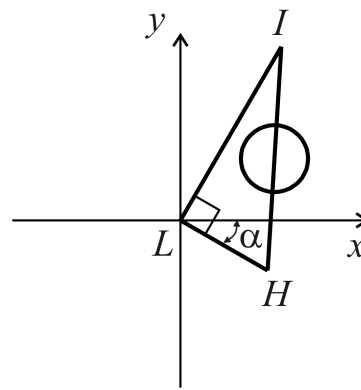
Вариант 24

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



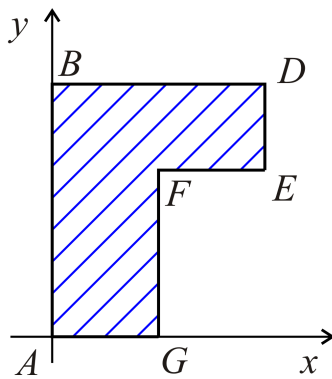
$AB=5\text{см};$
 $BE=3\text{см};$
 $EF=5\text{см};$
 $LH=5\text{см};$
 $HI=12\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=1\text{см}.$

a)



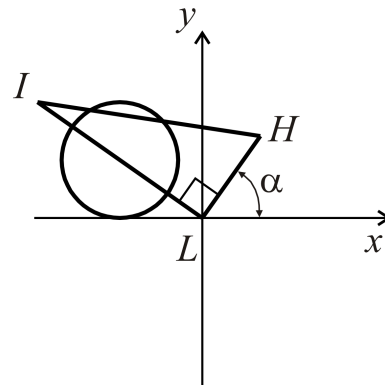
б)

Вариант 25



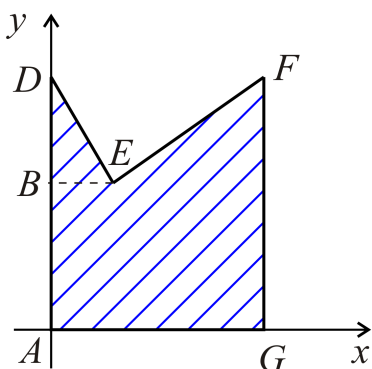
$AB=6\text{см};$
 $BD=5\text{см};$
 $DE=2\text{см};$
 $EF=3\text{см};$
 $FG=4\text{см};$
 $LH=10\text{см};$
 $HI=15\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=4\text{см}.$

a)



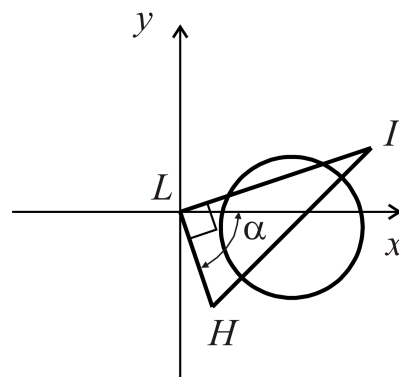
б)

Вариант 26



$AB=5\text{см};$
 $BD=3\text{см};$
 $BE=2\text{см};$
 $FG=5\text{см};$
 $GA=4\text{см};$
 $LH=6\text{см};$
 $HI=9\text{см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=3\text{см}.$

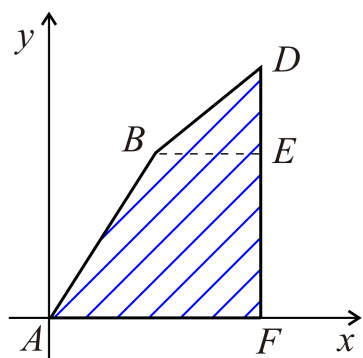
a)



б)

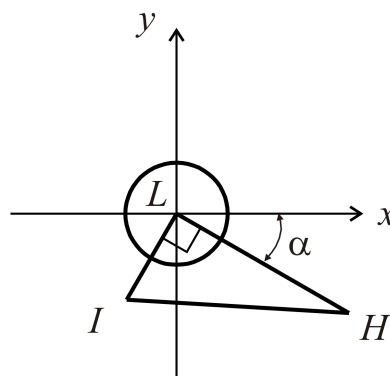
Вариант 27

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3



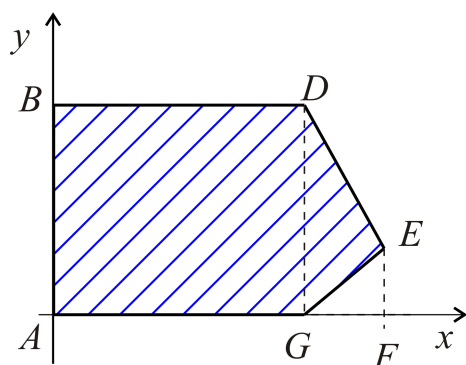
a)

$BE=3\text{см};$
 $DE=3\text{см};$
 $EF=4\text{см};$
 $FA=5\text{см};$
 $LH=8\text{см};$
 $HI=15\text{см};$
 $\alpha=30^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



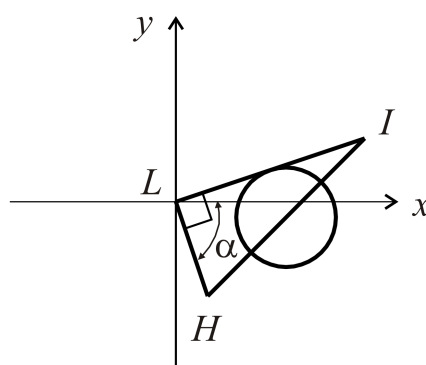
б)

Вариант 28



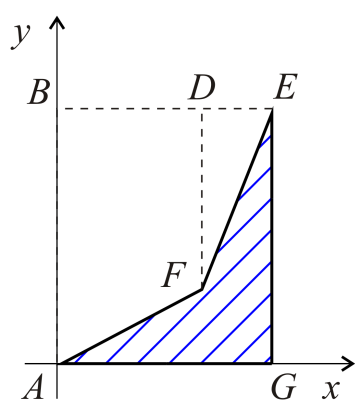
a)

$AB=5\text{см};$
 $BD=6\text{см};$
 $EF=1\text{см};$
 $FG=2\text{см};$
 $GA=6\text{см};$
 $LH=4\text{см};$
 $HI=12\text{см};$
 $\alpha=60^\circ;$
 $r=2\text{см}.$



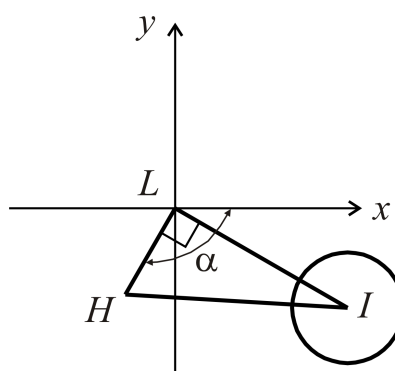
б)

Вариант 29



a)

$AB=6\text{см};$
 $BD=5\text{см};$
 $DE=2\text{см};$
 $DF=4\text{см};$
 $EG=6\text{см};$
 $GA=7\text{см};$
 $LH=5\text{см};$
 $HI=15\text{см};$
 $\alpha=120^\circ;$
 $r=3\text{см}.$



б)

Вариант 30

Рис. 33. Продолжение: Данные вариантов. Задание С3

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ И ПОЛОЖЕНИЙ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТЕЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ»(С3)

Пример №3

Твердое однородное тело состоит из тонкой фигурной пластины, рис.34, *a*, или системы жестко связанных с тонким кольцом двух тонких однородных стержней (рис. 34, *б*), расположенных в одной плоскости.

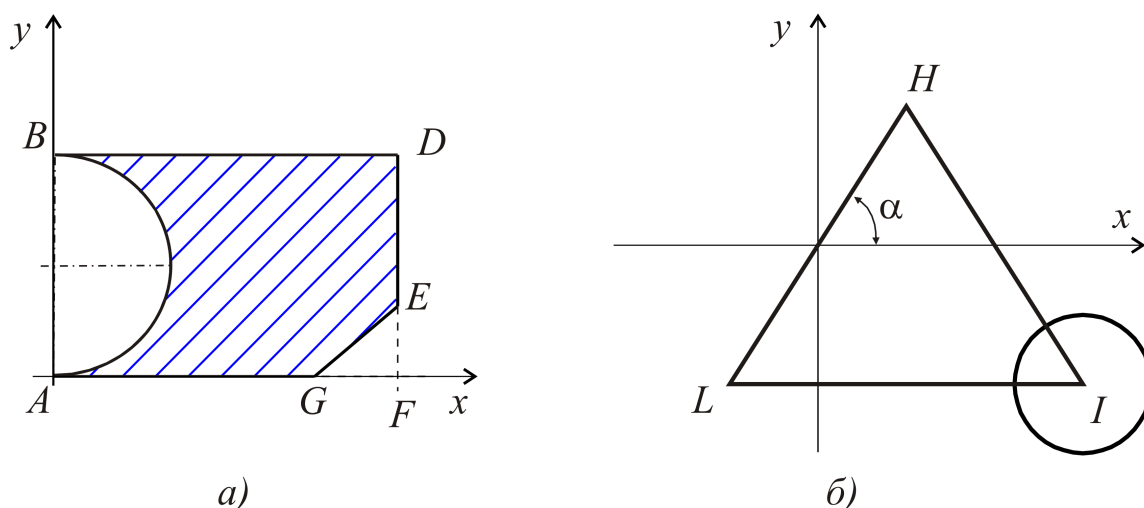


Рис. 34. К данным примера №3

Согласно условиям задания С3, необходимо:

- 1) Определить статические моменты для случая *a*) и случая *б*) относительно осей $xу$, см. рис. 34.
- 2) Используя свойства статического момента, определить положение центры тяжести (точки *C*) для случая *a*) и центра тяжести (точки *K*) для случая *б*) в соответствующих системах координат $xу$, см. рис. 34.
- 3) Выполнить графическую часть для случая *a*) и случая *б*), изобразив в выбранном масштабе данные варианта, указав необходимые размеры, используемые в расчете, а также положение соответствующего центра тяжести.

РЕШЕНИЕ: Выписываем данные согласно номеру варианта:

Таблица 5

Данные варианта

№ варианта	Размеры, см										α , градус
	<i>AB</i>	<i>BD</i>	<i>DE</i>	<i>EF</i>	<i>FG</i>	<i>GA</i>	<i>LH</i>	<i>HI</i>	<i>IL</i>	<i>r</i>	
X	4	6	3	1	1	5	5	5	5	1,5	60

1) Рассмотрим случай *a*).

Разобьем твердое плоское тело, (см. рис.34, *a*) на простые элементы

согласно рис. 35, используя метод отрицательных площадей, и проведём их индексацию. Считаем площадь всего плоского твердого тела как алгебраическую сумму отрицательной площади полукруга (элемента №1), положительной площади прямоугольника $ABDF$ (элемента №2) и отрицательной площади прямоугольного треугольника FGE .

Рассчитаем координаты центров тяжести и значения площадей отдельных элементов.

Для элемента №1:

Используем данные справочника и рис.34, согласно которым:

$$x_1 = \frac{4 \cdot r}{3\pi} \Rightarrow x_1 = \frac{4 \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)}{3\pi} \approx 0,85 \text{ см.}$$

$$y_1 = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ см.}$$

Таким образом, координаты центра тяжести полукруга (элемента №1): $C_1(0,85; 2 \text{ см})$.

Площадь полукруга (элемента №1) определим по формуле:

$$A_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot (AB)^2}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot (4)^2}{4} \Rightarrow A_1 = -6,28 \text{ см}^2.$$

Для элемента №2:

Согласно данным рисунка 35:

$$x_2 = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \Rightarrow x_2 = 3 \text{ см.}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 4 \Rightarrow y_2 = 2 \text{ см.}$$

Таким образом, координаты центра тяжести прямоугольника (элемента №2): $C_2(3; 2 \text{ см})$.

Площадь прямоугольник $ABDF$ (элемента №2) определим по формуле:

$$A_2 = AB \cdot BD = 4 \cdot 6 \Rightarrow A_2 = 24 \text{ см}^2.$$

Для элемента №3:

$$x_3 = BD - \frac{1}{3} \cdot GF = 6 - \frac{1}{3} \cdot 1 \approx 5,67 \text{ см.}$$

$$y_3 = \frac{1}{3} EF = \frac{1}{3} \cdot 1 \Rightarrow y_3 \approx 0,33 \text{ см.}$$

Таким образом, координаты центра тяжести прямоугольного треугольника FGE (элемента №3): $C_3(5,67; 0,33 \text{ см})$.

Площадь прямоугольного треугольника FGE (элемента №3):

$$A_3 = -\frac{1}{2} GF \cdot EF = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow A_3 = -0,5 \text{ см}^2.$$

Определим статические моменты относительно осей x , y по формулам:

$$S_x = y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3 = 2 \cdot (-6,28) + 2 \cdot 24 + 0,33 \cdot (-0,5) \Rightarrow S_x = 35,28 \text{ см}^3.$$

$$S_y = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = 0,85 \cdot (-6,28) + 3 \cdot 24 + 5,67 \cdot (-0,5) \Rightarrow S_y = 64,03 \text{ см}^3.$$

Определим положение центра тяжести всего твердого плоского тела:

$$x_C = \frac{S_y}{\sum A_i} = \frac{64,03}{-6,28+24-0,5} \Rightarrow x_C \approx 3,72 \text{ см.}$$

$$y_C = \frac{S_x}{\sum A_i} = \frac{35,28}{-6,28+24-0,5} \Rightarrow y_C \approx 2,05 \text{ см.}$$

Таким образом, координаты центра тяжести: $C(3,72; 2,05 \text{ см})$ (см. рис. 35).

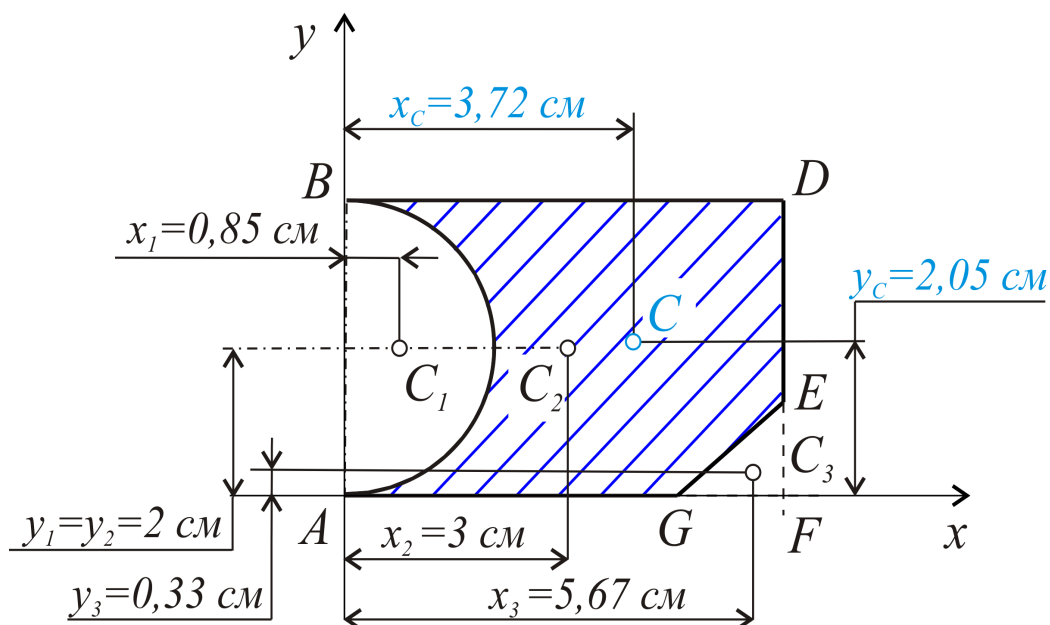


Рис. 35. К расчёту случая а)

2) Рассмотрим случай б).

Разобьем систему, состоящую из тонких однородных стержней, на отдельные элементы:

Стержень LH (элемент №1), стержень HI (элемент №2), стержень IL (элемент №3), кольцо (элемент №4), см. рис.34, б).

Рассчитаем координаты центров тяжести элементов и значения длин отдельных элементов.

Для элемента №1 (стержень LH).

Согласно данным рисунка 36:

$x_1 = y_1 = 0$. Длина $l_1 = LH = 5 \text{ см.}$

Для элемента №2 (стержень HI).

Согласно данным рисунка 36:

$x_2 = 2,5$; $y_2 = 0$. Длина $l_2 = HI = 5 \text{ см.}$

Для элемента №3 (стержень IL).

Согласно данным рисунка 36:

$x_3 = 1,25 \text{ см}$; $y_3 = -\frac{1}{2} LH \cos 30^\circ = -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow y_3 \approx -2,17 \text{ см.}$

Длина $l_3 = IL = 5 \text{ см.}$

Для элемента №4 (тонкое кольцо радиуса $r = 1,5 \text{ см}$).

Согласно данным рисунка 36:

$$x_4=3,75 \text{ см}; \quad y_4=y_3=-2,17 \text{ см}.$$

Длина $l_4=2\pi \cdot r=2 \cdot \pi \cdot 1,5 \Rightarrow l_4=9,424 \text{ см}.$

Определим статические моменты относительно осей xu по формулам:

$$S_x=y_1 \cdot l_1+y_2 \cdot l_2+y_3 \cdot l_3+y_4 \cdot l_4=0 \cdot 5+0 \cdot 5+(-2,17) \cdot 5+(-2,17) \cdot 9,424 \Rightarrow$$

$$S_x=-31,3 \text{ см}^3.$$

$$S_y=x_1 \cdot l_1+x_2 \cdot l_2+x_3 \cdot l_3+x_4 \cdot l_4=5 \cdot 0+5 \cdot 2,5+5 \cdot 1,25+3,75 \cdot 9,424 \Rightarrow$$

$$S_y=54,09 \text{ см}^3.$$

Определим положение центра тяжести точки K стержневой системы по формулам:

$$x_K=\frac{S_y}{\sum l_i}=\frac{54,09}{5+5+5+9,424} \Rightarrow x_K=2,21 \text{ см}.$$

$$y_K=\frac{S_x}{\sum l_i}=\frac{-31,3}{5+5+5+9,424} \Rightarrow y_K=-1,28 \text{ см}.$$

Таким образом, координаты центра тяжести: $K(2,21; -1,28 \text{ см})$ (см. рис. 36.).

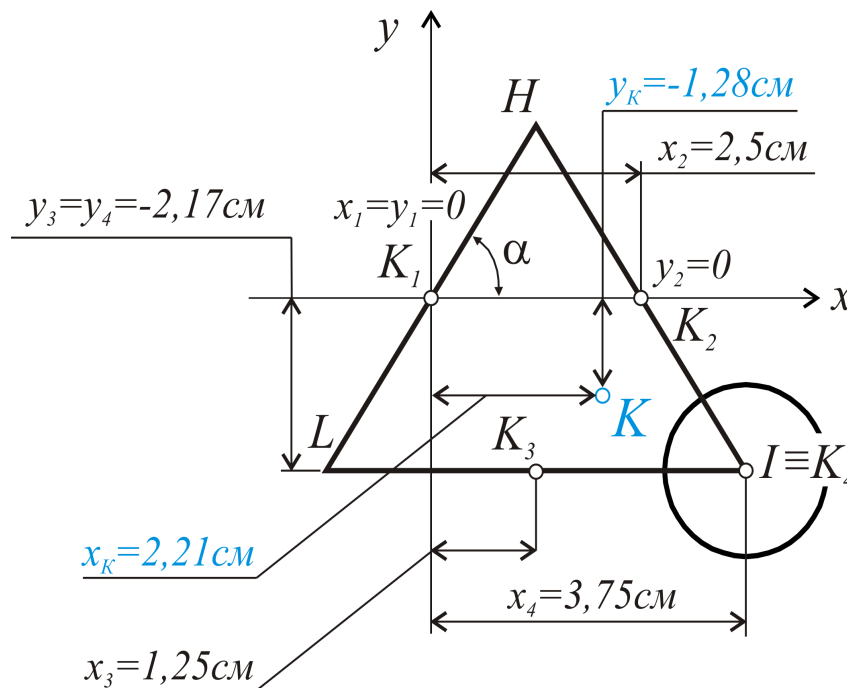


Рис.36. К расчёту случая б)

РАЗДЕЛ 2. КИНЕМАТИКА

2.1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика - это раздел теоретической механики, изучающий движение твердых тел без учета действующих на них сил. В общем случае движение разделяют на движение материальной точки и движение твердых тел. В кинематике изучение движения, как категории, начинают с изучения движения *точки*, то есть такого тела, размеры которого настолько малы по отношению к рассматриваемой системе, что ими пренебрегают. При этом выделяют такие кинематические характеристики движения, как *траектория*, измеряемая в СИ в m ; *скорость (линейная)*, измеряемая в СИ в m/c ; и *ускорение*, измеряемое в СИ в m/c^2 . Для задания движения точки применяются три способа: векторный, координатный и естественный.

Пусть точка M , движение которой необходимо определить, перемещаясь в пространстве, описывает *траекторию* M_0M_n (рис. 37).

При *векторном способе* задания движения положение точки в пространстве определяется её радиусом-вектором в системе декартовых координат:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}. \quad (2.1)$$

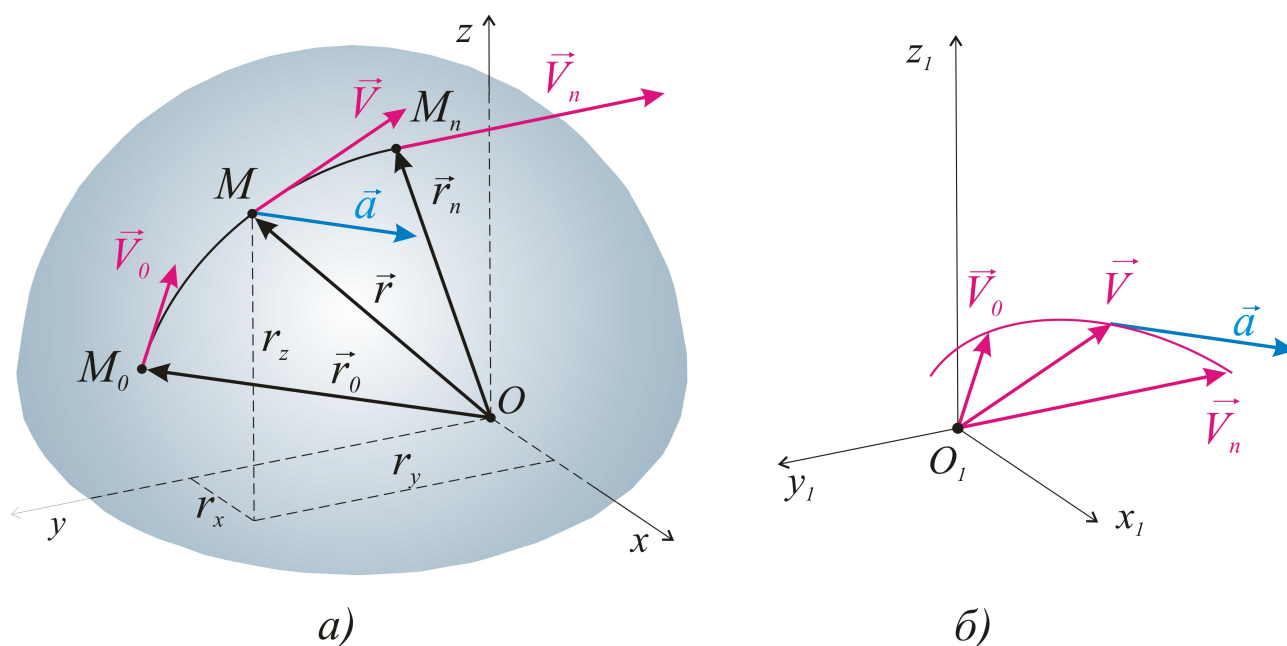


Рис 37. Векторный способ задания движения точки: а) траектория движения точки; б) годограф её вектора скорости

В таком случае закон, по которому изменяется радиус-вектор, будет являться законом движения точки:

$$\vec{r} = \vec{f}(t). \quad (2.1')$$

Кроме этого, для характеристики переменного вектора используют понятие его годографа. В общем случае, *годографом вектора* называют геометрическое место его концов в том случае, если начала переменного вектора в различные моменты времени без изменения его величины и направления приложить в какой-либо произвольной точке.

Согласно определению, траектория точки $M - M_0M_n$, (см. рис. 37, а) будет являться годографом радиуса-вектора \vec{r} , а годографом её скорости – линия, на которой располагаются концы векторов \vec{V} в различные моменты времени, если их начала совместить в произвольной точке O_1 (см. рис. 37, б).

Годограф скорости позволяет определить направление вектора полного ускорения, так как последний проходит по касательной к годографу скорости в данной точке (см. рис. 37, б).

Скорость точки M можно представить в виде:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.2)$$

а ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.3)$$

Вектор скорости точки \vec{V} всегда направлен по касательной к траектории движения точки в сторону её движения (т.е. по касательной к годографу радиуса-вектора), а вектор ускорения - в сторону вогнутости её траектории (по касательной к годографу вектора скорости, см. рис. 37).

При *координатном способе* задания движения положение точки в пространстве определяется ее тремя координатами x, y, z относительно предварительно заданной декартовой системы координат. В общем случае при движении точки каждая из её координат будет непрерывно изменяться с течением времени (рис. 38).

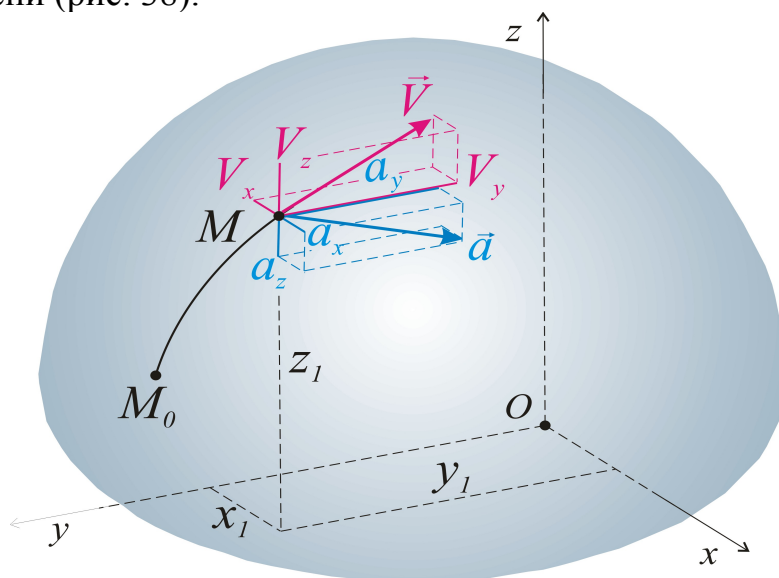


Рис. 38. Координатный способ задания движения

Таким образом, *уравнения движения точки в координатной форме* можно представить в виде системы уравнений её движения по отношению к параметрам x, y, z , зависящим от времени (системы параметрических уравнений):

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Координатный и векторный способы задания движения являются между собой взаимосвязанными, так как радиус-вектор может быть представлен в системе декартовых координат следующим образом:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \quad (2.5)$$

В таком случае, $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$,

т.е:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.6)$$

Модуль вектора скорости можно определить как:

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad (2.7)$$

а его положение - через направляющие косинусы:

$$\cos \alpha_1 = \frac{V_x}{V}; \cos \beta_1 = \frac{V_y}{V}; \cos \gamma_1 = \frac{V_z}{V}. \quad (2.8)$$

По аналогии:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \cdot \vec{k},$$

т.е:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}, a_y = \frac{dV_y}{dt}, a_z = \frac{dV_z}{dt}. \quad (2.9)$$

Модуль вектора ускорения можно определить как:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (2.10)$$

а его положение - через направляющие косинусы:

$$\cos \alpha_2 = \frac{a_x}{a}; \cos \beta_2 = \frac{a_y}{a}; \cos \gamma_2 = \frac{a_z}{a}. \quad (2.11)$$

Естественный способ задания движения применяется в случаях, когда траектория движения известна изначально.

При естественном способе задания движения точки её положение в пространстве определяется криволинейной координатой $s = \overset{\curvearrowright}{M_0 M}$.

Закон её изменения во времени является *законом движения точки в естественной форме*:

$$s = f(t). \quad (2.12)$$

В отличие от координатного способа задания движения, кинематические характеристики точки рассматриваются не в отношении неподвижных декартовых осей x, y, z , а в отношении подвижной системы естественных осей (осей естественного трехгранника τ, n, b), совершающей движение вместе с рассматриваемой точкой по заданной траектории (рис. 39).

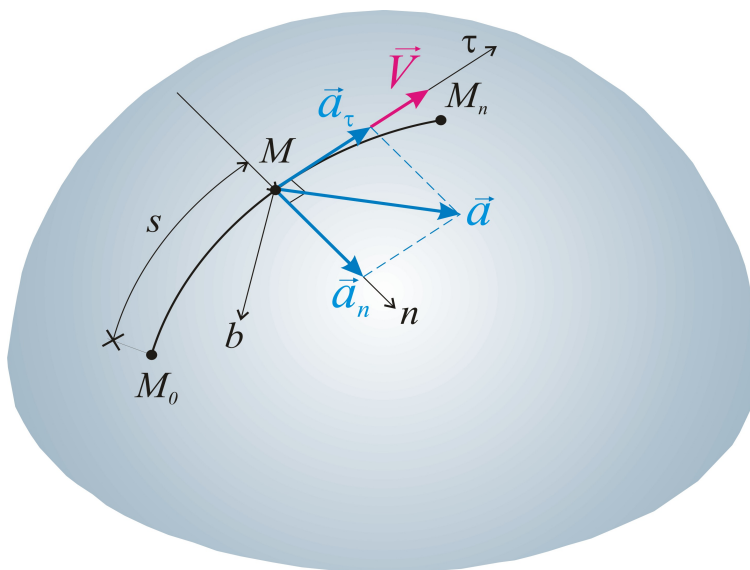


Рис. 39. Естественный способ задания движения

Скорость точки M при естественном способе задания движения определяется как:

$$V = \frac{ds}{dt}. \quad (2.13)$$

Ускорение \vec{a} точки M при естественном способе задания движения представляется в виде составляющих \vec{a}_τ и \vec{a}_n ускорений, взятых по взаимно

перпендикулярным естественным осям τ, n , т.е:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (2.14)$$

Абсолютную величину вектора *касательного ускорения* \vec{a}_τ можно определить следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}. \quad (2.15)$$

Касательное ускорение может принимать положительные, отрицательные значения или быть равным нулю. Вектор касательного ускорения точки \vec{a}_τ направлен по касательной к траектории (по естественной оси τ) в сторону движения точки (по направлению вектора скорости \vec{V}) в том случае, если $a_\tau > 0$, и по касательной к траектории (по естественной оси τ) в сторону, противоположную движению, если $a_\tau < 0$.

Вектор *нормального ускорения* точки \vec{a}_n всегда перпендикулярен касательной к траектории τ и направлен в сторону вогнутости траектории по радиусу её кривизны в данной точке (по естественной оси n).

Абсолютное значение вектора \vec{a}_n можно определить как:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (2.16)$$

где ρ - радиус кривизны траектории (например, $\rho = r$ в любой геометрической точке траектории при движении точки по окружности радиуса r).

2.2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, сохраняет параллельность своему первоначальному положению и после перемещения (рис.40).

При поступательном движении тела траектории движения его точек могут быть не только прямыми, но и кривыми линиями.

При поступательном движении все точки тела перемещаются по одинаковым по форме траекториям, имеют в любой момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

При поступательном движении равная для всех точек тела скорость V называется скоростью поступательного движения тела, а ускорение a - ускорением поступательного движения тела.

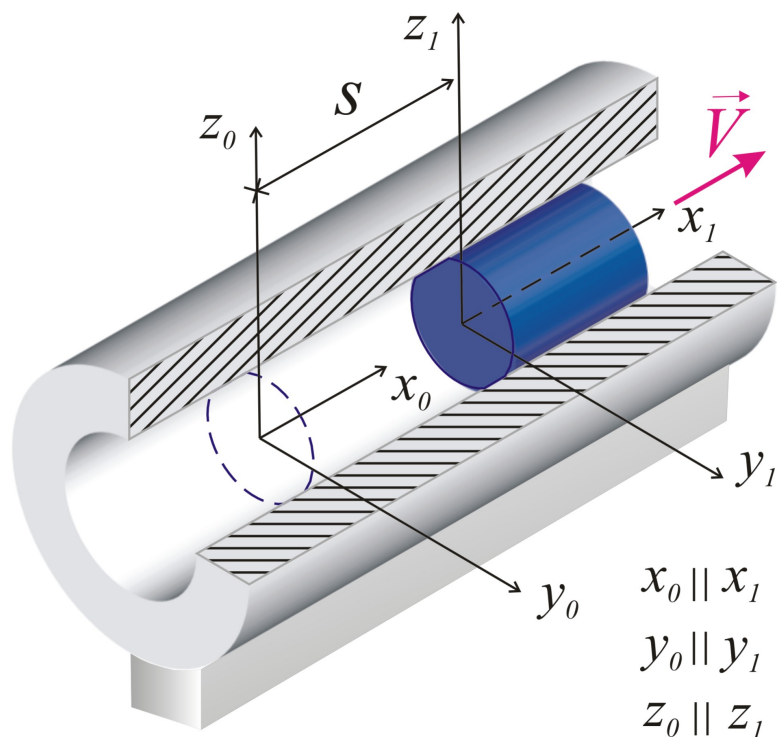


Рис. 40. Поступательное движение ползуна вдоль цилиндрической направляющей

Понятие скорости и ускорения тела имеют смысл только при поступательном движении.

2.3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие данному телу или неизменно с ним связанные, остаются все время неподвижными. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются *угол поворота (угловое перемещение)* φ , *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε .

Рассмотрим данные понятия, используя схему, изображенную на рис. 41. Проходящая через неподвижные точки A и B прямая z называется *осью вращения*. Для определения положения вращающегося тела проведем плоскость I - неподвижную и плоскость II - подвижную, жестко связанную с вращающимся телом.

Положение тела в любой момент времени будет определяться углом φ между этими двумя плоскостями, взятым с соответствующим знаком, называемым *угол поворота (угловым перемещением)* и измеряемым в СИ в *рад*.

Угол φ считается положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки, видимого со стороны положительного направления оси вращения z .

Таким образом, для определения положения тела в любой момент

времени можно использовать закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: $\varphi = f(t)$.

Рассмотрим понятие *угловой скорости* ω . Мгновенная угловая скорость определяется по формуле:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \text{ или}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.17)$$

Таким образом, величина угловой скорости в данный момент времени равна первой производной от угла поворота по времени.

При вращении против хода часовой стрелки, видимого с положительного направления оси вращения, считается, что $\omega > 0$; и $\omega < 0$, когда вращение видимо происходящим по ходу часовой стрелки.

Размерность угловой скорости $[\text{сек}^{-1}]$ или $[\text{рад}/\text{сек}]$.

В технике для характеристики равномерного вращения используют техническую величину - *частоту вращения* n , измеряемую в $\frac{\text{об}}{\text{мин}}$ или мин^{-1} .

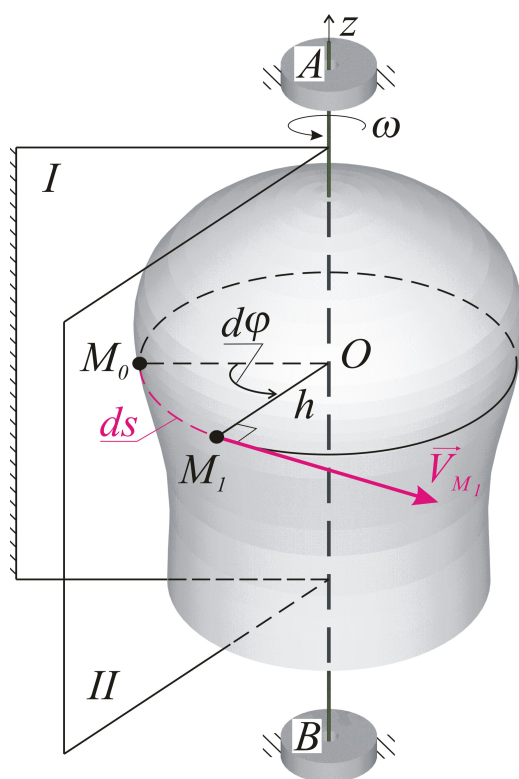


Рис. 41. Вращение твердого тела относительно неподвижной оси

Угловая скорость ω связана с частотой вращения n следующей

зависимостью:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n. \quad (2.18)$$

Угловую скорость можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен ω и который направлен параллельно оси вращения тела в сторону, откуда его вращение видимо происходящим против часовой стрелки.

Рассмотрим понятие *углового ускорения* ε . Мгновенное угловое ускорение определяется согласно выражению:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t},$$

или

$$\omega = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.19)$$

С учетом существующей дифференциальной зависимости угловой скорости и углового перемещения угловое ускорение можно выразить как

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.20)$$

Таким образом, величина углового ускорения тела в данный момент времени равна первой производной угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.

Размерность углового ускорения в системе СИ - сек^{-2} или рад/сек^2 .

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение считается ускоренным, а если убывает – замедленным.

Угловое ускорение тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного параллельно оси вращения. Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 42, а), и направлено противоположно - в случае замедленного вращения (рис. 42, б).

Следует заметить, что угловая скорость и ускорение одинаковы в любых точках твердого тела.

Являясь векторными величинами, они могут быть приложены к любой точке данного тела в полном соответствии с правилами выбора их направлений.

Если угловая скорость $\omega = \text{const}$ ($d\varphi = \omega dt$), то вращение тела считается равномерным.

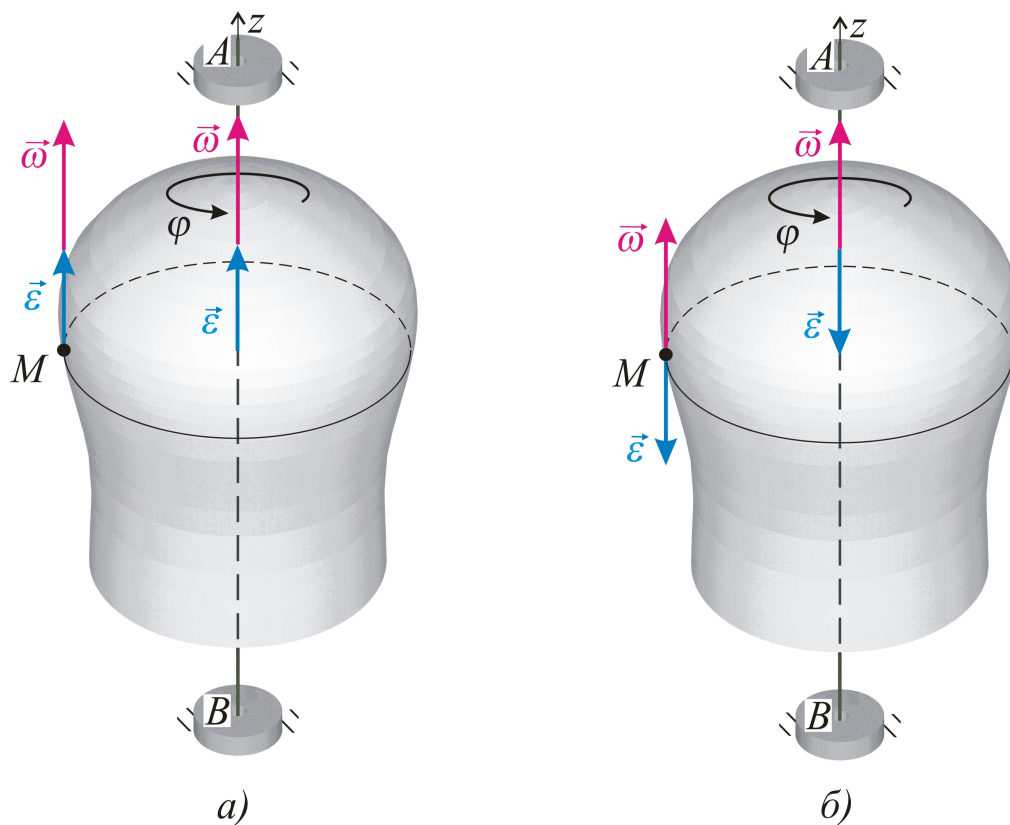


Рис. 42. Векторное представление угловой скорости и ускорения твердого тела:
 а) при ускоренном вращении б) при замедленном вращении

Закон равномерного вращения по своей структуре аналогичен закону при равномерном поступательном движении:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t. \quad (2.21)$$

Если $\varphi_0 = 0$, то:

$$\varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (2.22)$$

Для *равнопеременного вращательного движения* (в случае $\varepsilon = const$) закон движения примет вид:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.23)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.24)$$

Если величины ω, ε одного знака, вращение будет *равноускоренным*, разных – *равнозамедленным*.

Рассмотрим понятие *линейной* или *окружной скорости* точки тела. Величина линейной скорости точки вращающегося тела равна произведению

угловой скорости тела ω на расстояние h этой точки до оси вращения.

$$V = h \cdot \omega. \quad (2.25)$$

Касательное и нормальное ускорения точек тела, исходя из формул:
 $a_\tau = \frac{dV}{dt}$; $a_n = \frac{V^2}{\rho}$; $\rho = h$, определяются:

$$a_\tau = h \cdot \frac{d\omega}{dt} = h \varepsilon; \quad a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h} = h \omega^2. \quad (2.26)$$

Направления векторов \vec{a}_τ и \vec{a}_n аналогичны направлениям этих величин при рассмотрении перемещений материальной точки (см. п. 2.1).

Полное ускорение с учётом формулы $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ определяется следующим образом:

$$a = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.27)$$

Полные ускорения всех точек вращающегося тела прямо пропорциональны расстояниям от оси вращения и образуют один угол μ с радиусами описываемых ими окружностей, величину которого можно определить:

$$\mu = \text{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{\omega^2} \right). \quad (2.28)$$

Для определения выражений для векторов \vec{a} и \vec{V} из произвольной точки O , лежащей на оси AB , проведем радиус-вектор \vec{r} точки M (рис. 43). Тогда $h = r \sin \alpha$. Используя выражение для линейной скорости $V = h \cdot \omega$, получим:

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega}| r \sin \alpha \Rightarrow |\vec{V}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|. \quad (2.29)$$

Таким образом, *вектор линейной скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости на радиус-вектор этой точки (формула Эйлера: $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$)*. Если возьмем производные по времени от левой и правой части, получим выражение:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \quad \text{или} \quad \vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}). \quad (2.30)$$

Последняя формула определяет вектор ускорения любой точки вращающегося тела. Вектор $(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) = \vec{a}_\tau$ часто называют вектором *вращательного ускорения*, а вектор $(\vec{\omega} \times \vec{V}) = \vec{a}_n$ - вектором *осестремительного ускорения*.

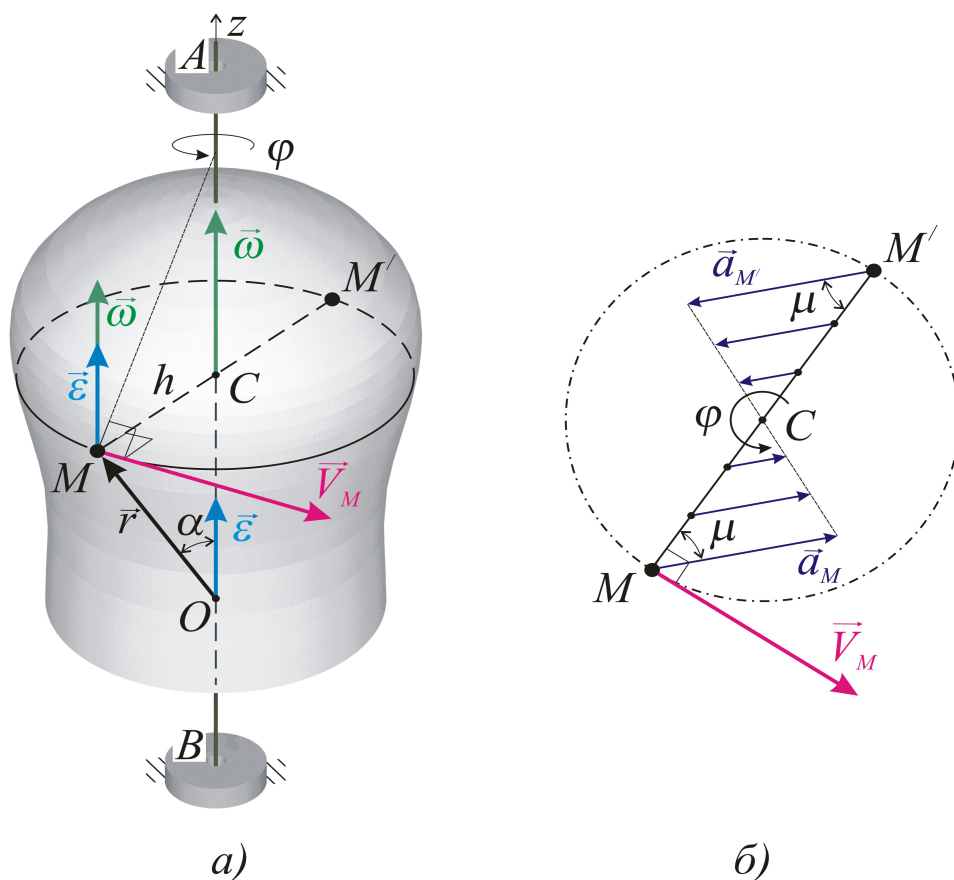


Рис. 43. К определению кинематических характеристик точек твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси: а) положение векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$; б) векторов линейной (окружной) скорости \vec{V}_M и полного ускорения \vec{a}_M точки M

2.4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным (плоским) движением тела называется такое движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Рассмотрим сечение S какого-либо тела, параллельное неподвижной плоскости (рис. 44). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM' , перпендикулярной сечению S , движутся в плоскости тождественно. Отсюда делаем вывод о том, что для изучения плоскопараллельного движения твердого тела (см. рис. 44) достаточно знать, как в плоскости Oxy , параллельной исходной неподвижной плоскости, движется произвольная плоская фигура S .

Рассмотрим плоскопараллельное движение подробнее. Положение

фигуры в плоскости Oxy определяется положением произвольного отрезка AB . В свою очередь, положение отрезка AB определяется с помощью координат x_A, y_A точки A и угла φ , который отрезок AB образует с осью x .

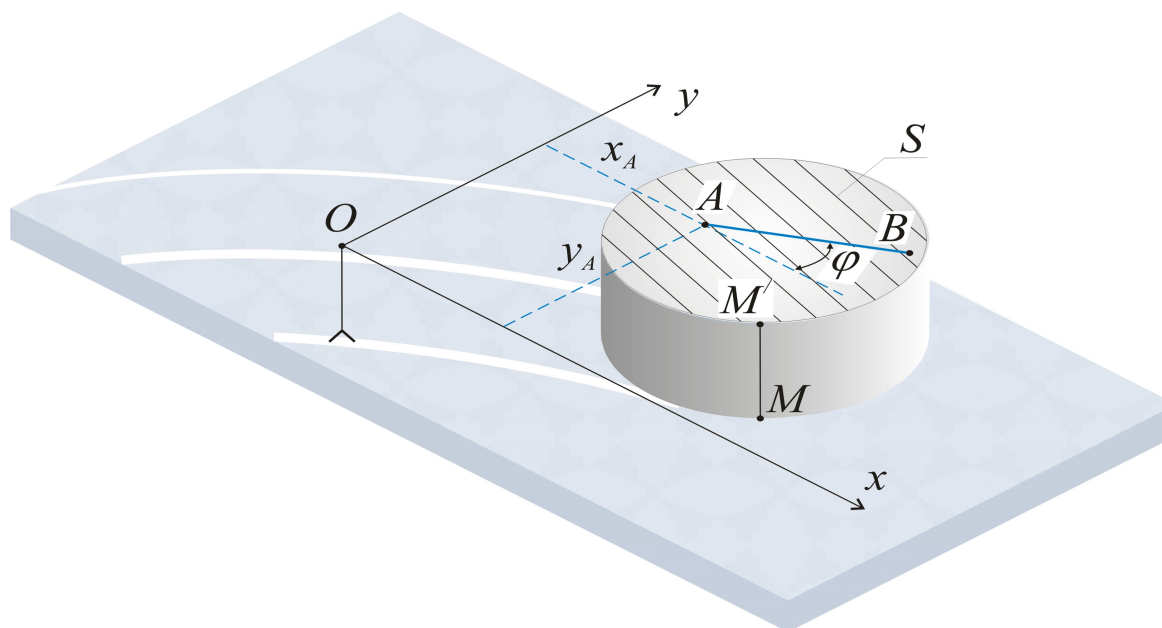


Рис.44. Плоскопараллельное движение

Точку A , выбранную в качестве исходной для определения положения отрезка, назовем *полюсом*. При движении плоской фигуры параметры x_A, y_A и φ будут, таким образом, меняться по законам:

$$x_A = f_1(t); y_A = f_2(t); \varphi = f_3(t). \quad (2.31)$$

Данные зависимости называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*.

Первые два отражают общее поступательное движение, при котором все точки движутся так, как и полюс A .

Третье уравнение будет определять вращательное движение данной плоской фигуры относительно полюса A . Таким образом, можно сделать следующий вывод:

В общем случае движение плоской фигуры в плоскости складывается из поступательного движения, при котором все точки движутся так, как и полюс, и вращательного движения данной фигуры вокруг этого полюса.

При изучении плоского движения в качестве полюса может быть выбрана любая точка фигуры.

Характеристики поступательной части при этом будут меняться, так как в общем случае $\vec{V}_C \neq \vec{V}_A$ и $\vec{a}_C \neq \vec{a}_A$ (иначе движение было бы простым поступательным), а вот характеристики вращательной части ω, ε остаются неизменными. Отсюда вывод: вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ. ТЕОРЕМА СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ТЕЛУ, СОВЕРШАЮЩЕМУ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Скорость любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса (теорема скоростей точек тела, совершающего плоскопараллельное движение), соответственно:

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (2.32)$$

Здесь \vec{V}_{BA} - скорость, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг полюса A . Надо полагать, что $V_{BA} = \omega \cdot |BA|$ и $\vec{V}_{BA} \perp BA$. Модуль и направление \vec{V}_B находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 45).

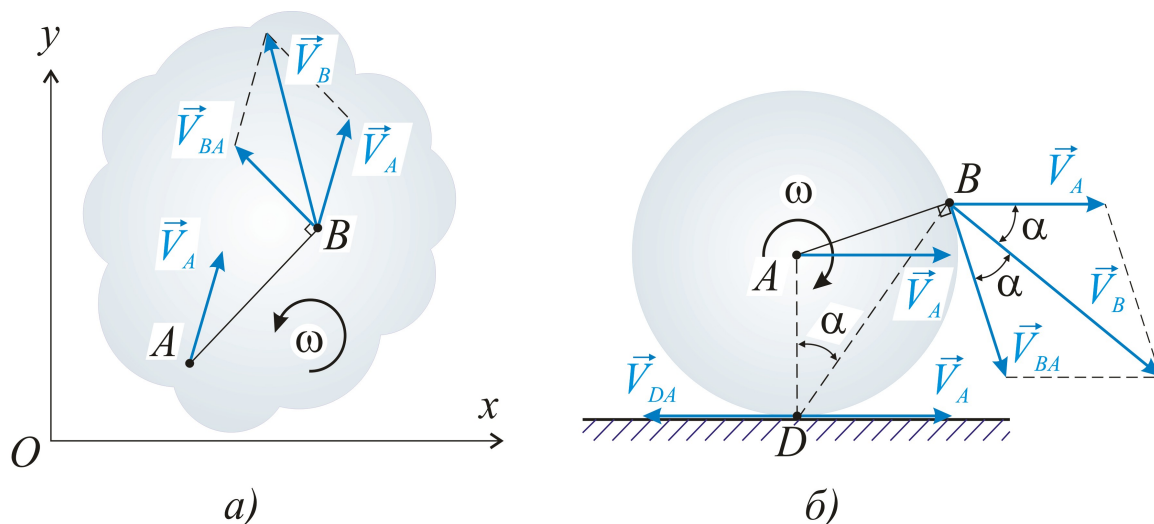


Рис. 45. Графическая интерпретация теоремы скоростей при плоскопараллельном движении

2.6. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ (МЦС)

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Если фигура совершает плоское движение, то в данный момент времени существует МЦС, и притом единственный. Чтобы определить положение МЦС, необходимо воспользоваться следующим.

1. Для определения МЦС надо знать только направления векторов скоростей \vec{V}_A и \vec{V}_B каких-нибудь точек A и B плоской фигуры (или траекторию этих точек). МЦС будет находиться в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к векторам скоростей этих точек (или касательным к их траекториям).

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой её точки B .

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к её расстоянию до мгновенного центра скоростей P . Например, угловую скорость фигуры, изображенной на рис. 46, a , можно определить, используя выражения:

$$\omega = \frac{V_B}{PB} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{V_A}{PA}. \quad (2.33)$$

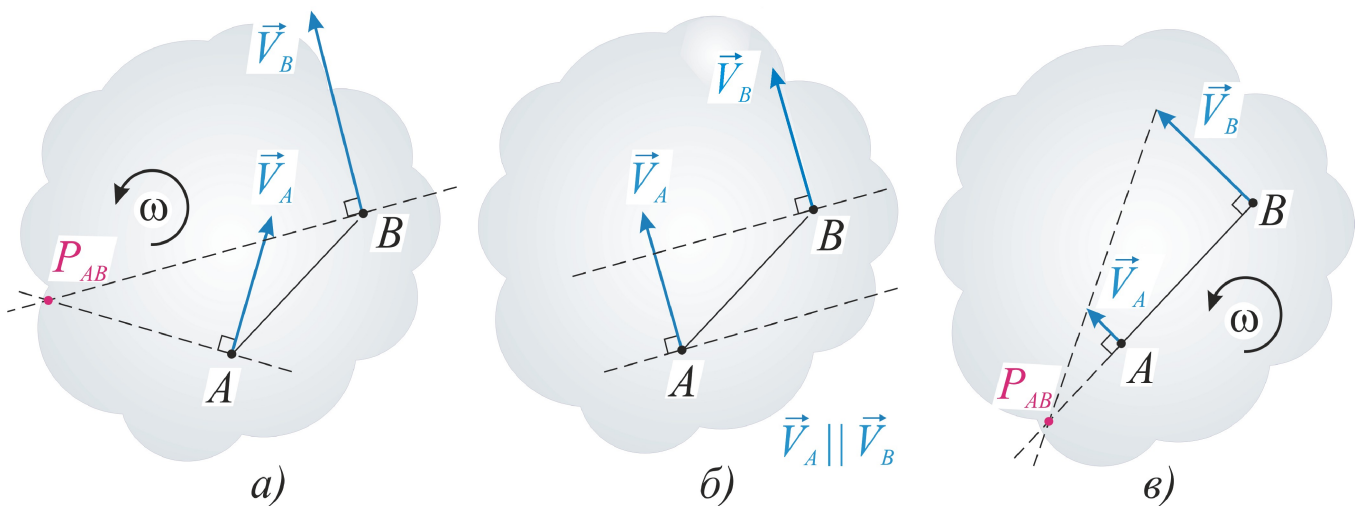


Рис. 46. К определению положения МЦС: a) по известным положениям векторов скоростей двух точек, не параллельных между собой и не перпендикулярных отрезку, соединяющему эти точки; b) по известным положениям векторов скоростей двух точек, параллельных между собой и не перпендикулярных отрезку, соединяющему эти точки (МЦС - лежит в бесконечности); v) по известным положениям векторов скоростей двух точек, параллельных между собой и перпендикулярных отрезку, соединяющему эти точки

Некоторые частные случаи определения МЦС:

a) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна линиям действия векторов скоростей, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек фигуры параллельны.

Такая фигура, совершая плоскопараллельное движение в общем, в данный момент времени имеет мгновенное поступательное распределение скоростей. Угловая скорость ω тела в этот момент времени будет равна нулю (рис. 46, b).

b) Если векторы скоростей \vec{V}_A и \vec{V}_B точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия $AB \perp \vec{V}_i$, то мгновенный центр скоростей P определяется точкой пересечения прямой, содержащей AB , с прямой, проведенной через концы векторов \vec{V}_A и \vec{V}_B этих точек (рис. 46, v).

в) Если известны вектор скорости \vec{V}_B какой-нибудь точки B фигуры и угловая скорость ω , то положение МЦС – точки P , лежащей на перпендикуляре к \vec{V}_B , определяется из равенства: $BP = \frac{V_B}{\omega}$.

г) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного тела, то точка касания P имеет скорость, равную нулю, и будет являться мгновенным центром скоростей (рис. 47).

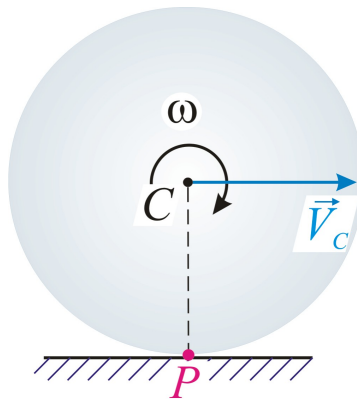


Рис. 47. К определению положения МЦС при качении без проскальзывания

2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Ускорение любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-либо точки A , принятой за полюс, и ускорения, которое точка B получает при своём движении вокруг этого полюса, т.е.:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (2.34)$$

Модуль вектора ускорения \vec{a}_{BA} точки B в её движении вокруг полюса определяется по формуле:

$$|\vec{a}_{BA}| = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \text{или} \quad |\vec{a}_{BA}| = |BA| \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.35)$$

Здесь ω, ε – угловая скорость и ускорение фигуры. Положение вектора ускорения \vec{a}_{BA} определяется величиной угла μ между вектором \vec{a}_{BA} и отрезком BA :

$$\mu = \arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right). \quad (2.36)$$

Модуль и направление вектора полного ускорения \vec{a}_B точки B можно определить построением соответствующего параллелограмма (рис.48).

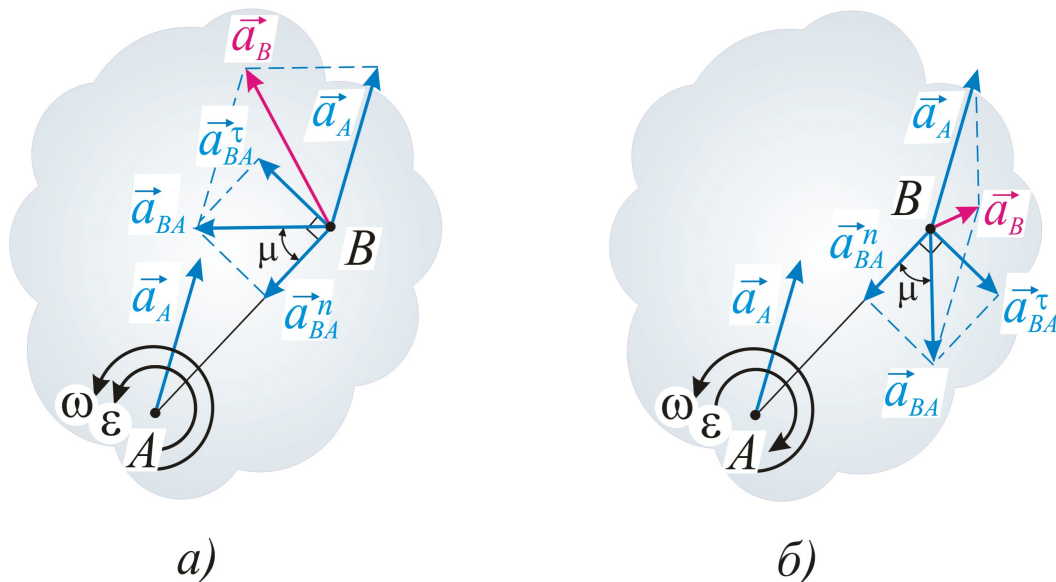


Рис. 48. К определению положения вектора полного ускорения точки фигуры, совершающей плоскопараллельное движение а) с ускоренным вращательным движением; б) с замедленным вращательным движением

При решении задач вектор \vec{a}_{BA} представляют в виде его двух взаимно перпендикулярных составляющих ускорений: касательного (вращательного) ускорения точки B в её вращательном движении относительно полюса A - $\vec{a}_{BA}^\tau = \vec{a}_{BA}^\epsilon$ и нормального (центростремительного) ускорения точки B в её вращательном движении относительно полюса A - $\vec{a}_{BA}^n = \vec{a}_{BA}^u$. То есть теорему ускорений $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$ можно проинтерпретировать в следующем виде:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n, \quad \text{или} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\epsilon + \vec{a}_{BA}^u. \quad (2.37)$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение \vec{a}_A можно представить как сумму касательной и нормальной составляющих, и полное ускорение точки B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (2.38)$$

Когда точка B движется по известной криволинейной траектории, величину \vec{a}_B можно заменить суммой $\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n$. Кроме этого:

1. Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно определить, если известны векторы скорости \vec{V}_A и ускорения \vec{a}_A какой-нибудь точки A этой фигуры в данный момент.

2. Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно определить, если известна траектория какой-либо другой точки B фигуры. В ряде случаев вместо траектории второй точки достаточно знать положение МЦС.

2.8. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ (МЦУ)

Точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю, называется *мгновенным центром ускорения* (МЦУ).

Для того, чтобы определить положение МЦУ, необходимо полупрямую (рис. 49), по которой направлен вектор полного ускорения \vec{a}_B какой-либо точки B , повернуть вокруг точки B на острый угол $\mu = \arctg\left(\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\right)$ и затем отложить на ней от точки B отрезок длины

$$BQ = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (2.39)$$

Точка Q будет определять положение МЦУ в данный момент времени. При ускоренном вращении фигуры поворот полупрямой, по которой направлен вектор \vec{a}_B вокруг точки B , нужно производить в направлении вращения фигуры. При замедленном вращении поворот осуществляется в направлении, обратном вращению фигуры.

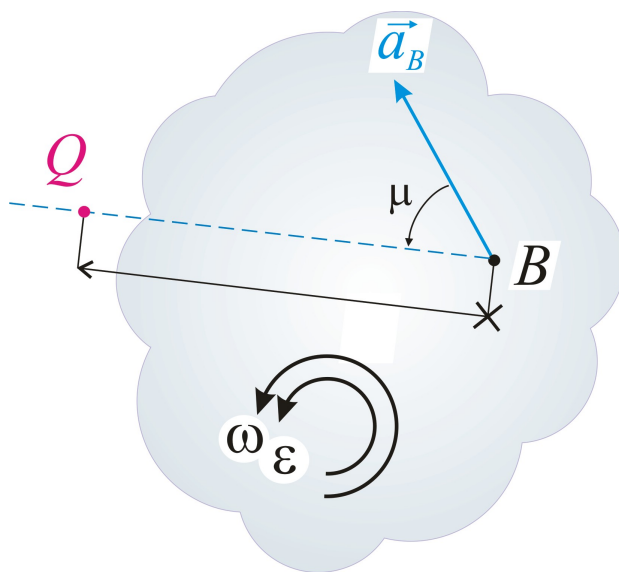


Рис. 49. К определению МЦУ по известному вектору ускорения точки твердого тела и по известной угловой скорости и углового ускорения тела

Если угловое ускорение тела в данный момент времени равно нулю ($\varepsilon=0$), то $\mu=0$ и мгновенный центр ускорения лежит на прямой, по которой направлен вектор \vec{a}_B .

Положение МЦУ также можно определить, зная направление и значение угловой скорости ω и углового ускорения ε тела и направление ускорений \vec{a}_A, \vec{a}_B двух каких-либо точек A и B в данный момент времени.

В таком случае положение МЦУ будет определяться точкой пересечения Q полупрямых, повернутых от линий действий векторов \vec{a}_A, \vec{a}_B , согласно

вышеупомянутому правилу, на угол μ (рис. 50), определяемый по формуле:

$$\mu = \operatorname{arctg} \left(\frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \right). \quad (2.40)$$

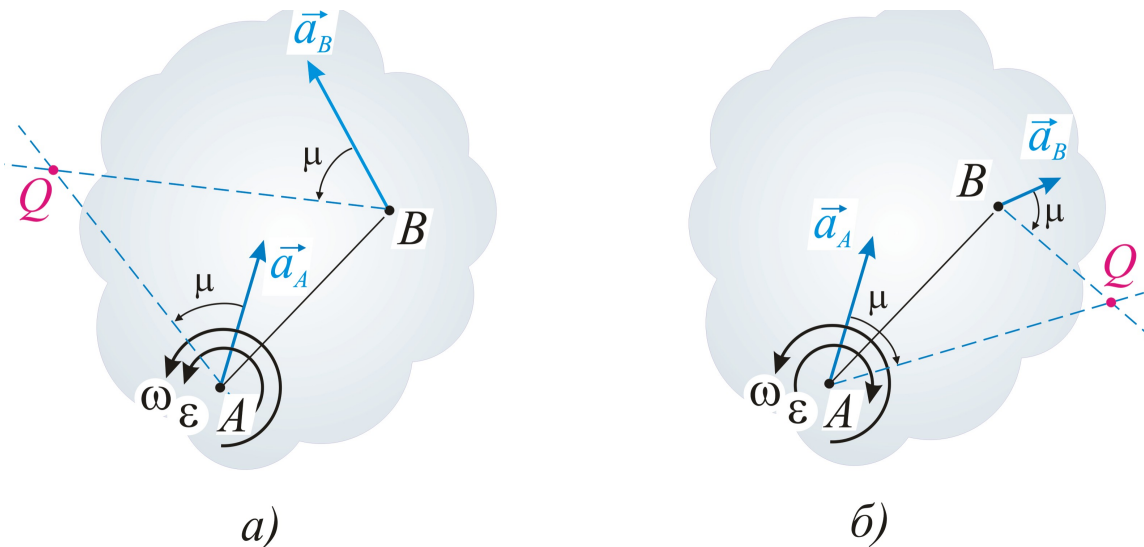


Рис.50. К определению МЦУ по известным векторам ускорений двух точек, угловой скорости и углового ускорения твердого тела а) при ускоренной вращательной составляющей движения твердого тела; б) при замедленной вращательной составляющей движения твердого тела

Мгновенный центр ускорений (МЦУ) можно применять для определения ускорений точек фигуры, совершающей плоскопараллельное движение. На основании свойств МЦУ следует, что:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{|QA|}{|QB|}. \quad (2.41)$$

Таким образом, модули ускорений точек фигуры, совершающей плоскопараллельное движение, прямо пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений. Кроме этого:

1. Положение МЦУ можно определить, зная модуль и направление угловой скорости и углового ускорения тела, а также модуль и направление вектора полного ускорения какой-либо точки в данный момент времени.

2. Положение МЦУ можно определить, зная модуль и направление угловой скорости и углового ускорения тела, а также направления векторов полных ускорений каких-либо двух точек в данный момент времени.

3. При определении кинематических параметров тела и его точек при плоскопараллельном движении, наряду с теоремой ускорений, можно использовать свойства МЦУ.

2.9. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ, ПЕРЕНОСНОЕ И АБСОЛЮТНОЕ ДВИЖЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета (неподвижной системе декартовых координат или подвижной системе естественных осей). Такой вид движения является *простым*. Если рассматривается движение точки или тела одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых неподвижна (стационарна), а вторая движется, то такое движение считается *сложным*. Рассмотрим точку M , движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, которая в свою очередь движется относительно другой условно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ (рис. 51).

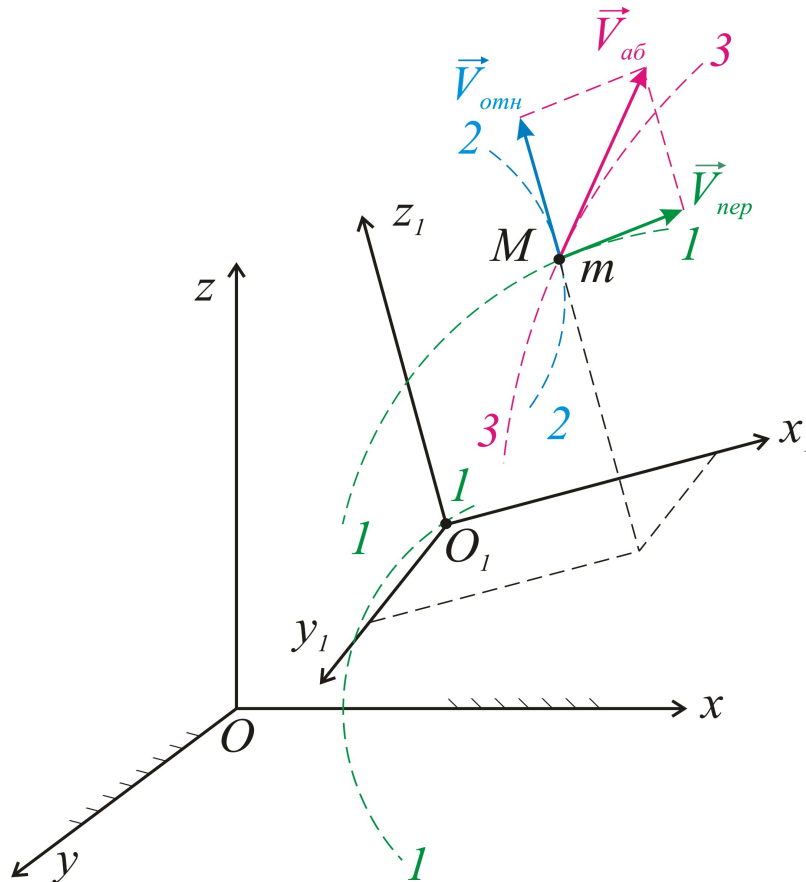


Рис. 51. Сложное движение точки

1. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Ox_1y_1z_1$ и всеми связанными с ней точками (включая точку m , неизменно связанную с точкой M) по отношению к неподвижной системе отсчета, является для точки M *переносным*. Траектория $1-1$ - будет являться траекторией переносного движения. Скорость той неизменно связанной с подвижными осями точки m , с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M , называется переносной скоростью точки M и обозначается $\vec{V}_{пер}$ или \vec{V}_e (от французского *entrainer* - увлекать), а ускорение этой точки m - переносным ускорением точки M и обозначается $\vec{a}_{пер}$ или \vec{a}_e .

2. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Ox_1y_1z_1$), называется *относительным*. Траектория **2-2** будет называться относительной траекторией.

Скорость точки M по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ называется относительной скоростью $\vec{V}_{отн}$ или \vec{V}_r (от латинского *relativus* – относительный), а ускорение – относительным ускорением $\vec{a}_{отн}$ или \vec{a}_r .

При определении данных величин движение самих осей $Ox_1y_1z_1$ во внимание не принимается (они считаются неподвижными).

3. Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета $Oxyz$, называется *абсолютным* или *сложным*.

Траектория **3-3** – называется абсолютной траекторией, скорость – абсолютной скоростью $\vec{V}_{абс}$, а ускорение – абсолютным ускорением $\vec{a}_{абс}$.

2.10. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

При сложном движении абсолютная (полная) скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}. \quad (2.42)$$

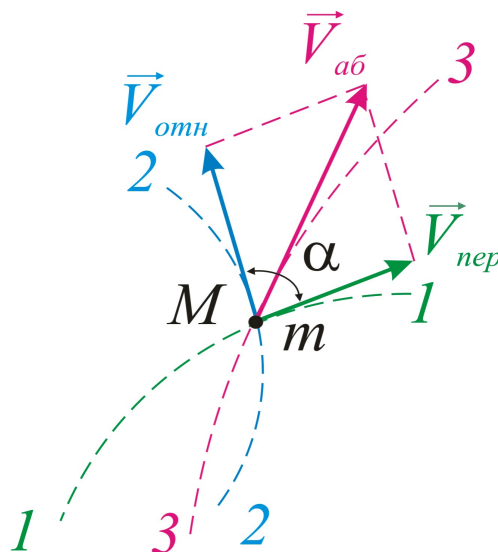


Рис.52. К теореме скоростей при сложном движении

Данные векторы направлены по касательным к соответствующим траекториям, рис. 52. Если угол между векторами $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{V}_{пер}$ равен α , то модуль абсолютной скорости можно определить по формуле:

$$V_{абс} = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{пер}^2 + 2V_{отн} \cdot V_{пер} \cos \alpha}. \quad (2.43)$$

2.11. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Очевидно, что вектор абсолютного ускорения характеризует изменение вектора абсолютной скорости по времени:

$$\vec{a}_{абс} = \frac{d \vec{V}_{абс}}{dt}. \quad (2.44)$$

Используя теорему скоростей $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{омн} + \vec{V}_{неп}$, вектор абсолютной скорости можно выразить как:

$$\vec{a}_{абс} = \frac{d \vec{V}_{абс}}{dt} = \frac{d \vec{V}_{ом}}{dt} + \frac{d \vec{V}_{неп}}{dt}. \quad (2.45)$$

Производные $\frac{d \vec{V}_{ом}}{dt}$ и $\frac{d \vec{V}_{неп}}{dt}$ определяют изменения каждого векторов скоростей при абсолютном движении.

Эти изменения в общем случае складываются из изменений каждого вектора при относительном (1) и при переносном (2) движении.

В таком случае, последнее выражение можно представить в следующем виде:

$$\vec{a}_{абс} = \frac{d \vec{V}_{абс}}{dt} = \frac{d \vec{V}_{ом}^1}{dt} + \frac{d \vec{V}_{ом}^2}{dt} + \frac{d \vec{V}_{неп}^1}{dt} + \frac{d \vec{V}_{неп}^2}{dt}. \quad (2.46)$$

По определению, относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении (движение самих осей $Oxuz$ во внимание не принимается, они считаются неподвижными). Поэтому

$$\frac{d \vec{V}_{ом}^1}{dt} = \vec{a}_{ом}.$$

В свою очередь, по определению, переносное ускорение характеризует изменение вектора переносной скорости только при переносном движении, т.е.:

$$\frac{d \vec{V}_{неп}^2}{dt} = \vec{a}_{неп}.$$

С учетом рассмотренного, выражение для абсолютного ускорения примет вид:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{omn} + \frac{d\vec{V}_{om}^2}{dt} + \frac{d\vec{V}_{nep}^1}{dt} + \vec{a}_{nep}. \quad (2.47)$$

При обозначении слагаемых $\frac{d\vec{V}_{om}^2}{dt} + \frac{d\vec{V}_{nep}^1}{dt}$ как $\vec{a}_{кор}$ его можно представить как:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{omn} + \vec{a}_{nep} + \vec{a}_{кор}. \quad (2.48)$$

Величина ускорения $\vec{a}_{кор}$, характеризующего изменение вектора относительной скорости точки при переносном движении и вектора переносной скорости при относительном движении, называется *поворотным* или *кориолисовым ускорением*, а выражение

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{omn} + \vec{a}_{nep} + \vec{a}_{кор} \quad (2.49)$$

называется *теоремой Кориолиса (теоремой ускорений)* при сложном движении точки.

Теорема Кориолиса формулируется следующим образом:

При сложном движении точки абсолютное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного, или кориолисова.

Кориолисово ускорение появляется при наличии у подвижных осей вращения, и его вектор можно определить как:

$$\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_{omn}). \quad (2.50)$$

Таким образом, вектор кориолисова ускорения равен удвоенному векторному произведению вектора переносной угловой скорости (угловой скорости подвижной системы отсчета) и вектора относительной скорости точки.

Кориолисово ускорение равно нулю:

- 1) Когда переносное движение является поступательным.
- 2) Когда относительная скорость в данный момент времени равна нулю.
- 3) Когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения или если в данный момент времени вектор \vec{V}_{omn} параллелен этой оси.

Модуль вектора кориолисова ускорения можно определить по формуле:

$$a_{кор} = 2 \cdot |\vec{\omega}| \cdot |\vec{V}_{omn}| \cdot \sin \alpha, \quad (2.51)$$

где $\alpha = (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{omn})$.

Направление вектора кориолисова ускорения произвольной точки M (рис. 53) при сложном движении определяется с помощью *правила Жуковского*:

Для определения положения вектора кориолисова ускорения необходимо спроецировать вектор относительной скорости $\vec{V}_{отн}$ данной точки на плоскость I , перпендикулярную оси переносного вращения, и полученный вектор $\vec{V}_{отн}^I$ повернуть в данной плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ в сторону переносного вращения.

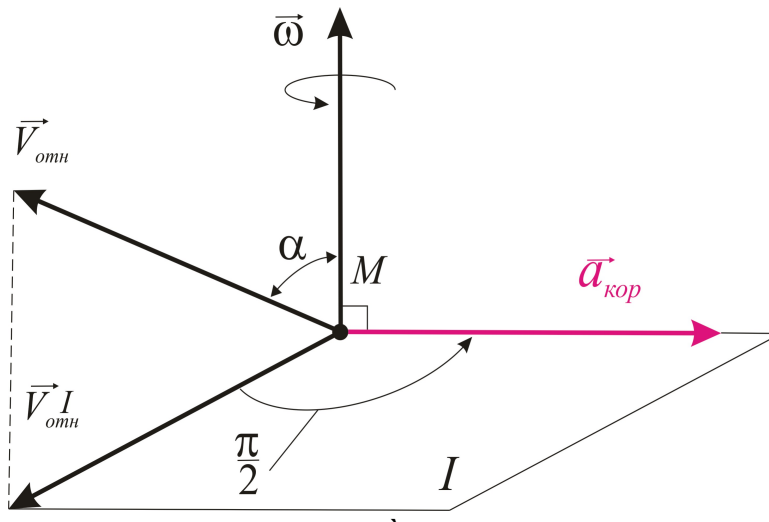


Рис. 53. К определению положения вектора кориолисова ускорения

Полученное положение будет соответствовать направлению вектора кориолисова ускорения (см. рис. 53).

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТОЧКИ»(К1)

Постановка задачи

Точка M движется в плоскости, согласно уравнениям движения $x = f(t)$, см и $y = f(t)$, см.

Согласно данным варианта требуется:

- 1) Определить траекторию движения точки;
- 2) Определить скорость (в см/с) и ускорение (в см/с²) точки M в требуемый момент времени t , сек.

Указания. Данное задание рассматривает тему «Кинематика точки».

Траектория движения точки определяется с помощью исключения величины t из параметрических уравнений и получения зависимости вида $y=f(x)$ или $x=f(y)$.

Результаты расчета интерпретируются графически в масштабе на листе миллиметровой бумаги формата А4. Необходимо изобразить в масштабе траекторию, показать векторные характеристики скорости и ускорений. Значения кинематических величин представить в виде табл. 6.

Результаты расчёта

Координаты точки, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x_M	y_M	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a_n	a_τ	a	ρ

Данные к расчёту взять из табл.7.

ДАННЫЕ ВАРИАНТОВ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ (К1)

Данные к работе К1

Вариант	Уравнение $x=f(t)$, см	Уравнение $y=f(t)$, см	Исследуемое время t , сек
1	$x=2+\cos(3\pi t/2)$	$y=4+\sin(3\pi t/2)$	0,5
2	$x=5\cos(\pi t/2)-2$	$y=5\sin(\pi t/2)+1$	1
3	$x=1-3\cos(4\pi t/3)$	$y=5\sin(4\pi t/3)+1$	2
4	$x=6\cos(\pi t/2)-2$	$y=2-4\sin(\pi t/2)$	0,5
5	$x=5\cos^2(2\pi t/3)+1$	$y=5\sin^2(2\pi t/3)+6$	1
6	$x=2t^2-t+1$	$y=2t$	2
7	$x=4t$	$y=2t^2+t-3$	0,5
8	$x=2\sin(4\pi t/3)$	$y=3\cos(4\pi t/3)+1$	1
9	$x=3\cos(4\pi t/3)-3$	$y=\sin(4\pi t/3)-1$	2
10	$x=2-\sin(3\pi t/4)$	$y=\cos(3\pi t/4)+3$	0,5
11	$x=1+\cos(3\pi t/2)$	$y=3+\sin(3\pi t/2)$	1
12	$x=3\cos(\pi t/2)+2$	$y=4\sin(\pi t/2)-3$	2
13	$x=4-\cos(4\pi t/3)$	$y=\sin(4\pi t/3)-6$	0,5
14	$x=3\cos(\pi t/2)-1$	$y=3-3\sin(\pi t/2)$	1
15	$x=\cos^2(2\pi t/3)+1$	$y=\sin^2(2\pi t/3)-6$	2
16	$x=3t^2+2t-1$	$y=-t$	0,5
17	$x=t/2$	$y=t^2+t-2$	1
18	$x=-2\cos(4\pi t/3)$	$y=3\sin(4\pi t/3)+2$	2
19	$x=\sin(4\pi t/3)$	$y=3\cos(4\pi t/3)-2$	0,5
20	$x=1-\sin^2(3\pi t/4)$	$y=\cos^2(3\pi t/4)-4$	1
21	$x=1+2\cos(3\pi t/2)$	$y=2\sin(3\pi t/2)$	2
22	$x=4\cos(\pi t/2)-2$	$y=4\sin(\pi t/2)+5$	0,5
23	$x=2+5\sin(4\pi t/3)$	$y=1-3\cos(4\pi t/3)$	1
24	$x=2\cos(\pi t/2)+6$	$y=2-4\sin(\pi t/2)$	2
25	$x=3\cos^2(2\pi t/3)-2$	$y=3\sin^2(2\pi t/3)+1$	0,5
26	$x=2t^2-t+4$	$y=t/3$	1
27	$x=2t$	$y=2t^2+t-3$	2
28	$x=3-\cos(4\pi t/3)$	$y=\sin(4\pi t/3)+4$	0,5
29	$x=2\sin(4\pi t/3)$	$y=5\cos(4\pi t/3)-2$	1
30	$x=1+\sin(3\pi t/4)$	$y=\cos(3\pi t/4)$	2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТОЧКИ»(К1)

Пример №4

Точка M движется в плоскости, согласно уравнениям движения
 $x = 4\sin(3\pi t/2) + 1$, см и $y = 2 - 6\cos(3\pi t/2)$, см.

Согласно условиям задания, требуется определить траекторию движения точки, а также определить скорость (в см/с) и ускорение (в см/с²) точки M в момент времени $t = 1,5$ сек.

РЕШЕНИЕ:

1) Решая совместно исходные уравнения, избавляемся от параметра t .

Представим уравнения движения в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} x &= 4\sin(3\pi t/2) + 1 \\ y &= 2 - 6\cos(3\pi t/2) \end{aligned} \right\}.$$

Перенесём в левую часть свободные члены правой части:

$$\left. \begin{aligned} x - 1 &= 4\sin(3\pi t/2) \\ y - 2 &= -6\cos(3\pi t/2) \end{aligned} \right\}.$$

Возведём левые и правые части обоих уравнений в квадрат:

$$\left. \begin{aligned} (x - 1)^2 &= 4^2 \sin^2(3\pi t/2) \\ (y - 2)^2 &= (-6)^2 \cos^2(3\pi t/2) \end{aligned} \right\}.$$

Разделим левые и правые части обоих уравнений на постоянные коэффициенты, стоящие перед тригонометрической функцией, учитывая при этом тождество $(-a)^2 = a^2$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(x - 1)^2}{4^2} &= \sin^2(3\pi t/2) \\ \frac{(y - 2)^2}{6^2} &= \cos^2(3\pi t/2) \end{aligned} \right\}.$$

К левой части первого уравнения прибавим левую часть второго уравнения, а к правой части первого уравнения прибавим правую часть второго уравнения:

$$\frac{(x - 1)^2}{4^2} + \frac{(y - 2)^2}{6^2} = \sin^2(3\pi t/2) + \cos^2(3\pi t/2).$$

С учётом известного тригонометрического тождества $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$$\frac{(x - 1)^2}{4^2} + \frac{(y - 2)^2}{6^2} = 1.$$

Полученное уравнение движения точки M является уравнением эллипса с центром в точке $O(1\text{ см}; 2\text{ см})$ и размерами полуосей 4 см и 6 см соответственно.

2) Определим координаты точки M в заданный момент времени и её кинематические характеристики.

Для определения координат точки M в заданный момент времени подставим в исходные параметрические уравнения движения значение $t=1,5\text{сек}$.

$$\left. \begin{aligned} x &= 4 \sin(3\pi \cdot 1,5/2) + 1 \\ y &= 2 - 6 \cos(3\pi \cdot 1,5/2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(3,83\text{см}; -2,24\text{см}).$$

Для определения вектора скорости точки M в данный момент времени продифференцируем исходные параметрические уравнения и определим проекции вектора скорости на соответствующие оси.

$$V_x = \dot{x} = (4 \sin(3\pi t/2) + 1)' = 4 \cdot \frac{3\pi}{2} \cos(3\pi t/2) \Rightarrow V_x = 6\pi \cos(3\pi t/2).$$

При $t=1,5\text{сек}$:

$$V_x = 6\pi \cos(3\pi \cdot 1,5/2) \Rightarrow V_x \approx 13,32\text{см/с}.$$

$$V_y = \dot{y} = (2 - 6 \cos(3\pi t/2))' = 6 \cdot \frac{3\pi}{2} \sin(3\pi t/2) \Rightarrow V_y = 9\pi \sin(3\pi t/2).$$

При $t=1,5\text{сек}$:

$$V_y = 9\pi \sin(3\pi \cdot 1,5/2) \Rightarrow V_y \approx 19,98\text{см/с}.$$

Положение вектора скорости точки M в момент времени $t=1,5\text{сек}$ будет определяться геометрической суммой V_x и V_y , а модуль - выражением:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{13,32^2 + 19,98^2} \Rightarrow V \approx 24\text{см/с}.$$

Для определения вектора ускорения дважды продифференцируем исходные параметрические уравнения (или один раз - уравнения скоростей по координатам) и определим проекции вектора ускорения на соответствующие оси.

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x = (6\pi \cos(3\pi t/2))' = 6\pi \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot (-\sin(3\pi t/2)) \Rightarrow a_x = -9\pi^2 \sin(3\pi t/2).$$

При $t=1,5\text{сек}$:

$$a_x = -9\pi^2 \sin(3\pi \cdot 1,5/2) \Rightarrow a_x \approx -62,75\text{см/с}^2.$$

$$a_y = \ddot{y} = \dot{V}_y = (9\pi \sin(3\pi t/2))' = 9\pi \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \cos(3\pi t/2) \Rightarrow a_y = 13,5\pi^2 \cos(3\pi t/2).$$

При $t=1,5\text{сек}$:

$$a_y = 13,5\pi^2 \cos(3\pi \cdot 1,5/2) \Rightarrow a_y \approx 94,12\text{см/с}^2.$$

Положение вектора ускорения точки M в момент времени $t=1,5\text{сек}$ будет определяться геометрической суммой a_x и a_y , а модуль выражением:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-62,75)^2 + 94,12^2} \Rightarrow a \approx 113\text{см/с}^2.$$

Определим вектор ускорения точки M в момент времени $t=1,5\text{сек}$ другим способом.

Величина вектора касательного ускорения точки M :

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{a}}{V} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V} = \frac{13,32 \cdot (-62,75) + 19,98 \cdot 94,12}{24} \Rightarrow a_\tau \approx 43,53\text{см/с}^2.$$

Величина вектора нормального ускорения точки M :

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{V} = \frac{|V_x \cdot a_y - V_y \cdot a_x|}{V} = \frac{|13,32 \cdot 94,12 - 19,98 \cdot (-62,75)|}{24} \Rightarrow a_n \approx 104,1\text{см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории движения в точке M может быть определен как:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{24^2}{104,1} \Rightarrow \rho \approx 5,5 \text{ см.}$$

Представляем рассчитанные данные в виде табл. 6* и графически интерпретируем проведённый расчёт.

Таблица 6*

Результаты расчёта

Координаты точки, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны ρ , см
x_M	y_M	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a_n	a_τ	a	
3,83	-2,24	13,32	19,98	24	-62,75	94,12	104,1	43,53	113	5,5

На основании расчётных данных можно сделать вывод о том, что в заданный момент времени точка M осуществляет криволинейное движение с ускорением (рис. 54).

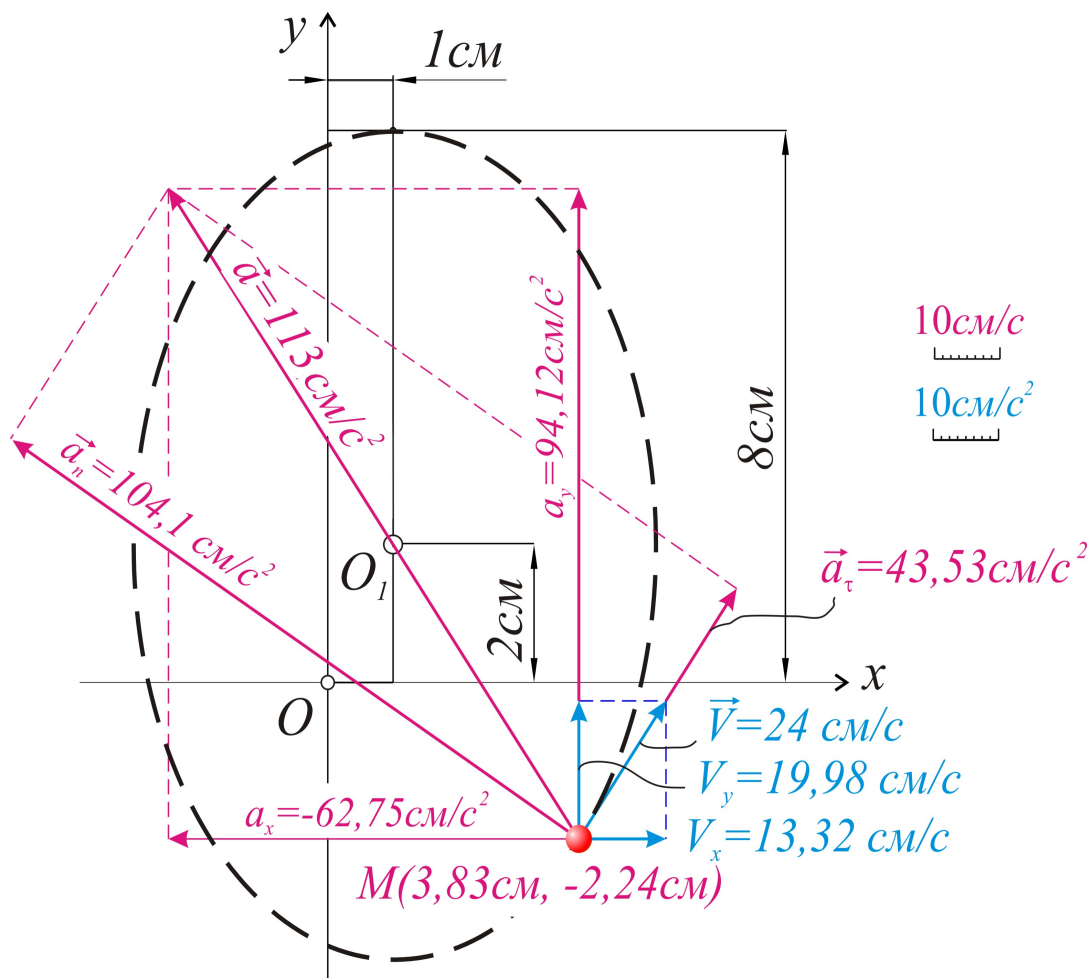


Рис. 54. К результатам расчёта примера №4

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»(К2)

Постановка задачи

Механическая система, состоящая из твердых тел, приводится в движение посредством ведущего звена (звено и его направление движения обозначено стрелкой) по прилагаемому закону. Согласно данным варианта, определить требуемые кинематические параметры в указанный момент времени.

Указания

Ординарная механическая система (могут быть вариации) состоит из зубчатой рейки 1, зубчатых или фрикционных, ступенчатых или ординарных колес 2, 3; роликов или брусков (грузов) 4, 5, 6 и т.д.

Гибкие связи в ременной передаче считать нерастяжимыми, осуществляющими передачу движения без проскальзывания. Грузы считать материальными точками. Трением брусков по наклонным и горизонтальным плоскостям пренебречь.

Рекомендуется в общем виде выразить перемещение звеньев через перемещение ведущего звена.

Последовательно, идя от ведущего звена к последнему исполнительному (ведомому), определить функциональные зависимости движений этих звеньев.

Используя полученные зависимости, найти требуемые кинематические параметры звеньев в заданный момент времени.

Полученные результаты представить в виде таблицы 8.

Таблица 8

Результаты расчёта

Расчитанные параметры	Угловое ускорение, c^{-2}	Угловая скорость, c^{-1}	Линейная скорость (полное ускорение) $см/с (см/с^2)$
Значение			

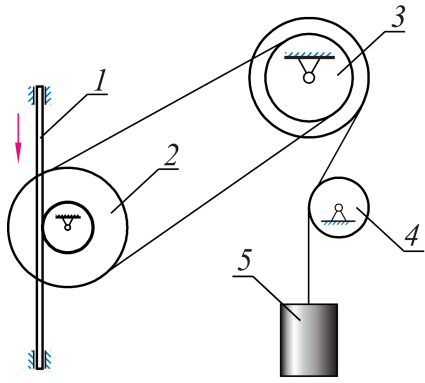
Данные к расчёту взять из табл.9 и рис.55.

ДАННЫЕ ВАРИАНТОВ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ (К2)

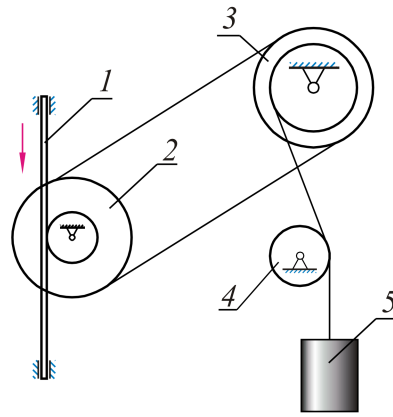
Таблица 9

Данные к работе К2

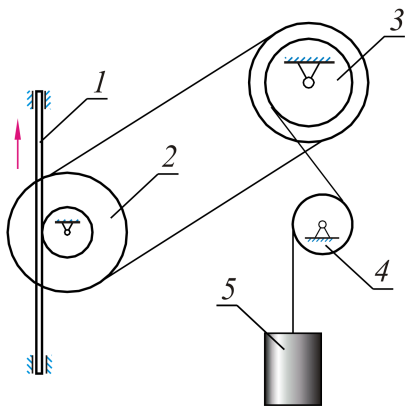
№ варианта	Закон движения: $s_1, (см)$; или $\varphi, (радиан)$	$R_2,$ <i>см</i>	$r_2,$ <i>см</i>	$R_3,$ <i>см</i>	$r_3,$ <i>см</i>	$R_4,$ <i>см</i>	$r_4,$ <i>см</i>	$R_5,$ <i>см</i>	$r_5,$ <i>см</i>	$t,$ <i>сек</i>	Определить в ($c^{-2}, c^{-1},$ $см/сек$ или $см/сек^2$)
1	$s_1=1,5t^3+t^2+0,2$	40	20	50	30	50	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_4, V_5$
2	$s_1=0,2t^3+0,2t^2+1$	60	30	40	30	20	-	-	-	0,5	$\varepsilon_4, \omega_3, a_5$
3	$s_1=0,5t^3-0,2t^2+0,5$	20	10	30	20	10	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_4, a_5$
4	$s_1=0,3t^3+0,5t^2+t$	30	15	40	30	-	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_2, V_4$
5	$s_1=0,2t^3-0,3t^2+0,5$	70	30	80	50	30	-	-	-	2	$\varepsilon_4, \omega_3, V_5$
6	$s_1=0,1t^3+0,6t^2+t$	50	20	60	40	20	-	-	-	0,5	$\varepsilon_3, \omega_4, V_5$
7	$s_1=t^3-0,5t^2-2$	35	20	40	30	20	-	-	-	1	$\varepsilon_2, \omega_4, V_5$
8	$s_1=0,6t^3+0,2t^2$	55	25	50	40	-	-	-	-	2	$\varepsilon_3, \omega_2, V_4$
9	$s_1=0,7t^3-0,5t^2+4$	40	20	30	40	20	-	50	15	1	$\varepsilon_5, \omega_4, V_6$
10	$s_1=0,8t^3+0,3t^2$	45	25	30	50	10	-	-	-	2	$\varepsilon_4, \omega_3, V_5$
11	$s_1=0,9t^3-0,2t^2$	80	30	50	60	50	25	30	-	1	$\varepsilon_2, \omega_5, V_6$
12	$s_1=0,4t^3+0,1t^2$	50	25	50	40	20	10	-	-	0,5	$\varepsilon_4, \omega_2, V_5$
13	$s_1=1,2t^3-0,1t^2$	100	80	60	40	-	-	-	-	2	$\varepsilon_2, \omega_3, a_4$
14	$s_1=2t^3+0,5t^2+t$	30	15	50	35	40	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_4, a_5$
15	$s_1=1,1t^3-0,2t^2-t$	80	60	50	30	-	-	-	-	0,5	$\varepsilon_2, \omega_3, V_4$
16	$s_1=0,8t^3+0,1t^2$	30	20	60	40	45	-	-	-	2	$\varepsilon_4, \omega_2, V_5$
17	$s_1=1,5t^3-0,8t^2$	80	-	120	100	-	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_2, V_4$
18	$s_1=0,1t^3+0,4t^2$	50	20	60	40	35	30	-	-	0,5	$\varepsilon_4, \omega_3, V_5$
19	$s_1=1,2t^3-0,3t^2$	90	80	50	30	-	-	-	-	2	$\varepsilon_2, \omega_3, V_4$
20	$s_1=2t^3+0,2t^2$	20	10	40	30	40	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_4, V_5$
21	$s_1=1,6t^3+0,5t^2$	50	40	90	70	-	-	-	-	0,5	$\varepsilon_2, \omega_3, a_4$
22	$s_1=1,7t^3-0,1t^2$	30	10	40	25	30	20	-	-	2	$\varepsilon_4, \omega_3, V_5$
23	$s_1=1,8t^3+0,4t^2+1$	50	30	100	80	20	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_4, a_5$
24	$s_1=1,9t^3-0,3t^2$	40	20	50	30	40	30	-	-	0,5	$\varepsilon_4, \omega_3, V_5$
25	$s_1=0,8t^3+0,2t^2$	30	20	15	-	-	-	-	-	2	$\varepsilon_2, \omega_3, V_4$
26	$s_1=0,6t^3-0,1t$	80	60	30	-	50	-	20	-	1	$\varepsilon_5, \omega_4, V_6$
27	$s_1=t^3+0,4t^2$	50	30	20	-	-	-	-	-	0,5	$\varepsilon_2, \omega_3, V_4$
28	$s_1=0,5t^3+0,1t^2$	70	60	50	-	20	-	-	-	1	$\varepsilon_3, \omega_4, V_5$
29	$s_1=2,2t^3-0,4t^2$	30	20	10	-	-	-	-	-	2	$\varepsilon_3, \omega_2, V_4$
30	$s_1=2,1t^3+0,7t^2$	65	45	40	-	20	-	-	-	0,5	$\varepsilon_4, \omega_3, a_5$



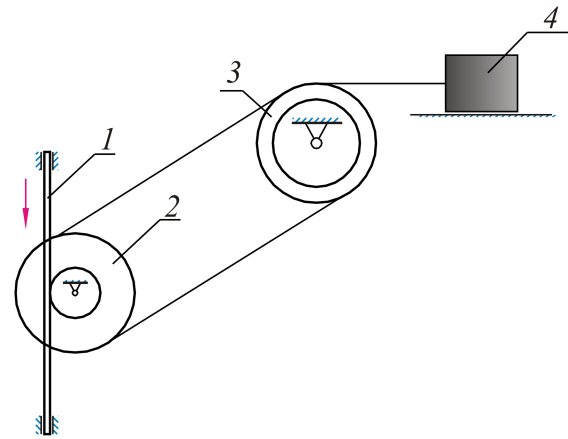
Вариант 1



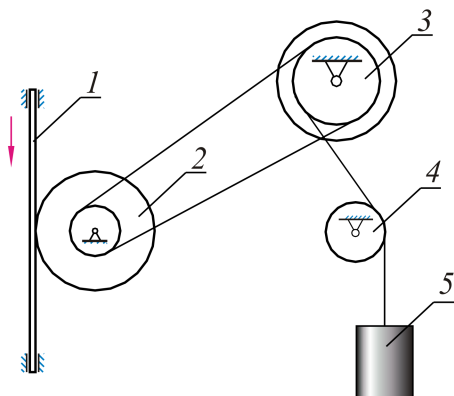
Вариант 2



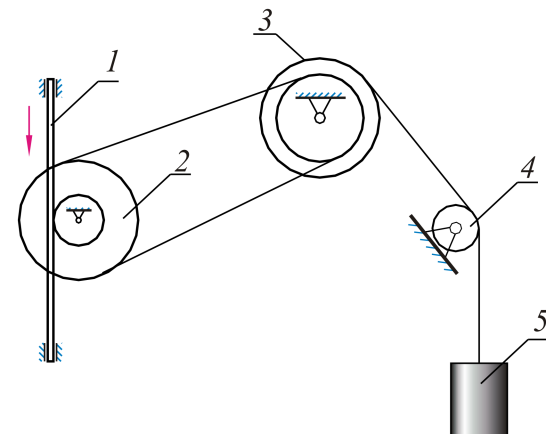
Вариант 3



Вариант 4

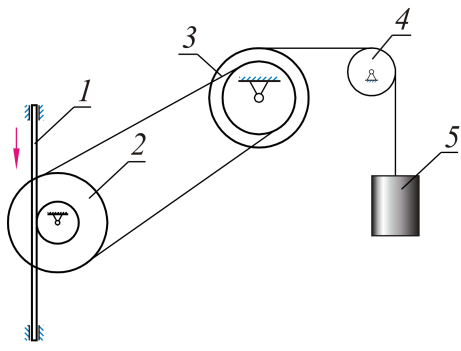


Вариант 5

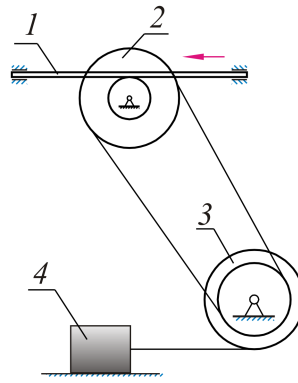


Вариант 6

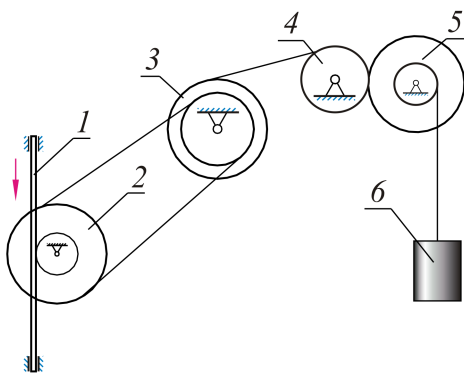
Рис. 55. Данные вариантов. Задание К2



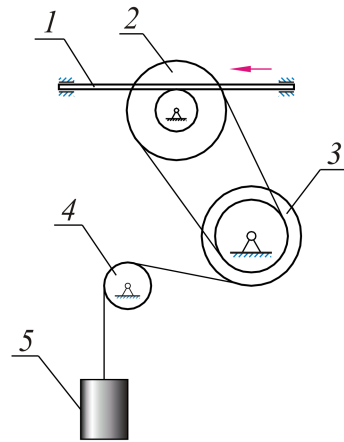
Вариант 7



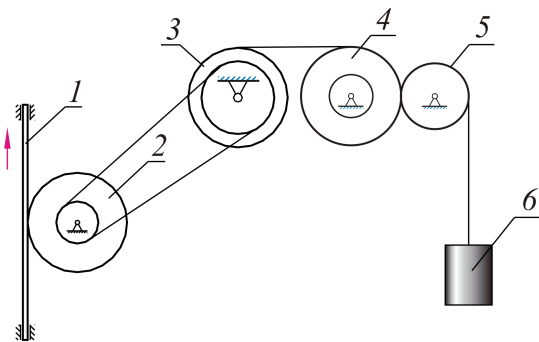
Вариант 8



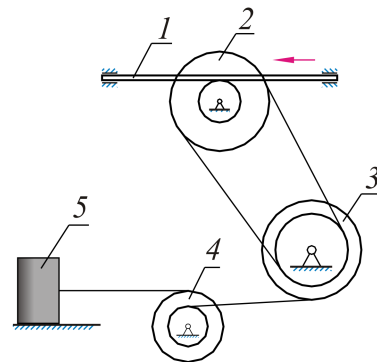
Вариант 9



Вариант 10

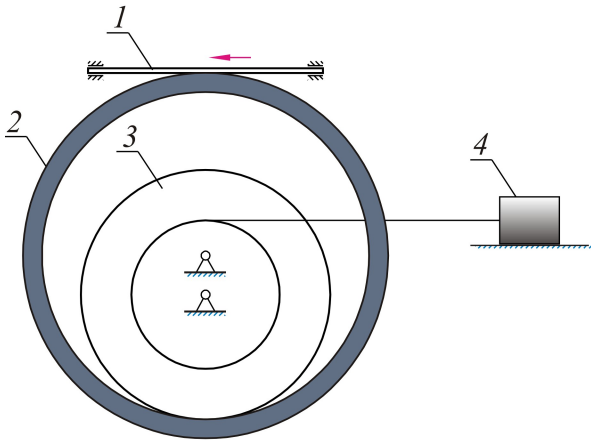


Вариант 11

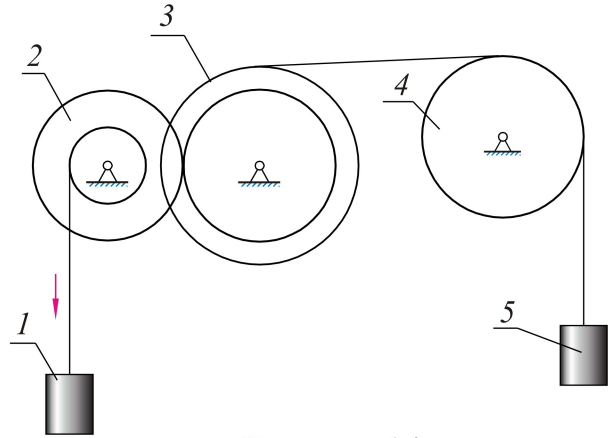


Вариант 12

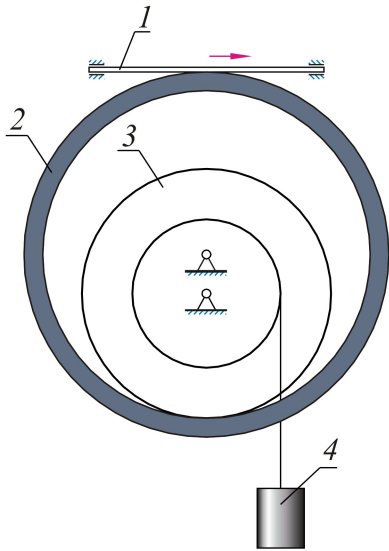
Рис. 55. Продолжение: Данные вариантов. Задание К2



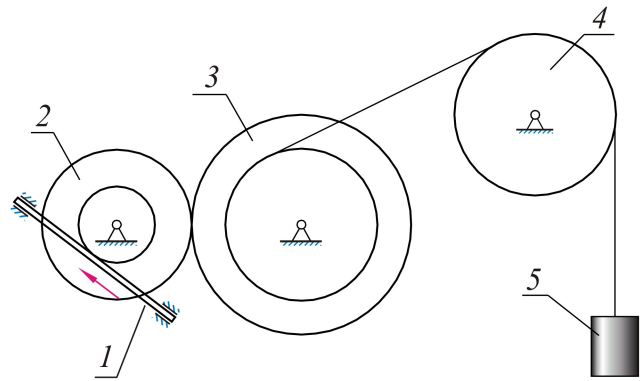
Вариант 13



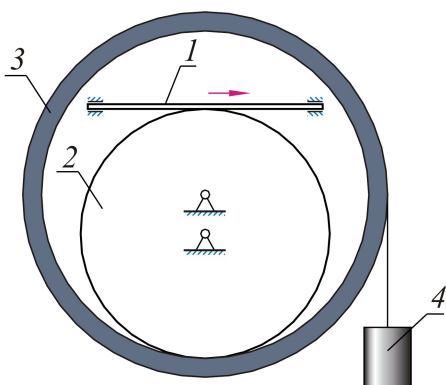
Вариант 14



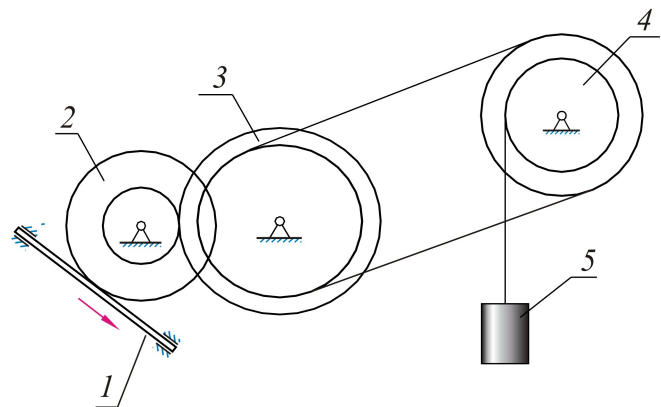
Вариант 15



Вариант 16

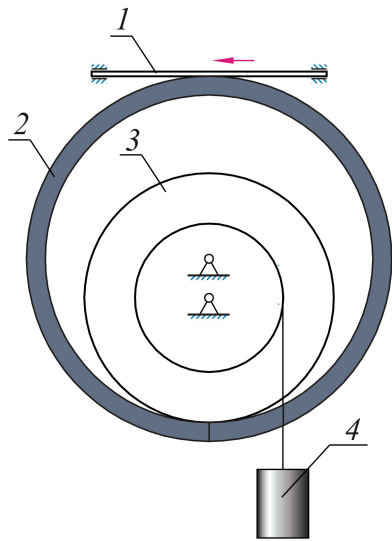


Вариант 17

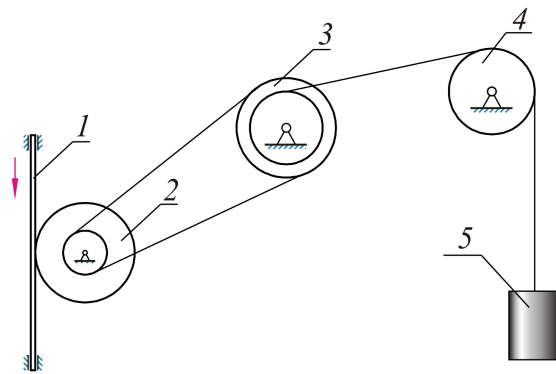


Вариант 18

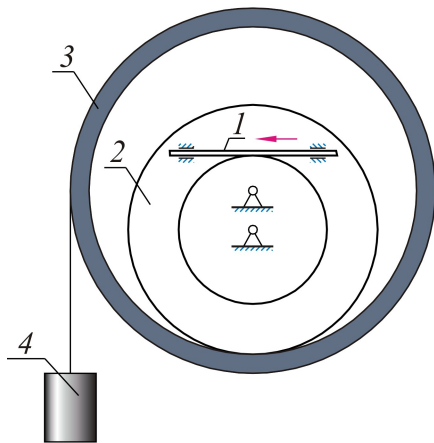
Рис. 55. Продолжение: Данные вариантов. Задание К2



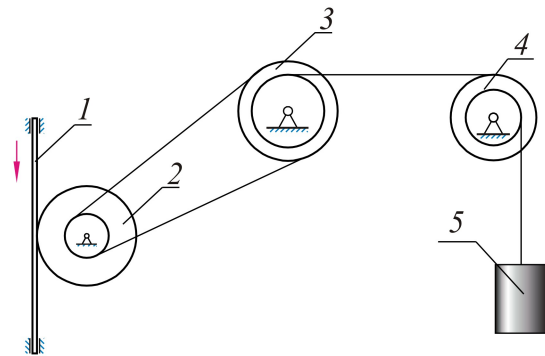
Вариант 19



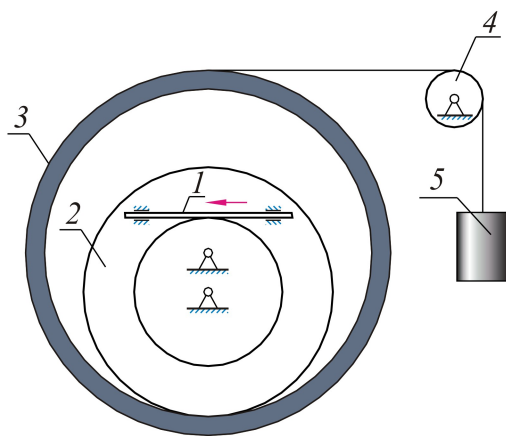
Вариант 20



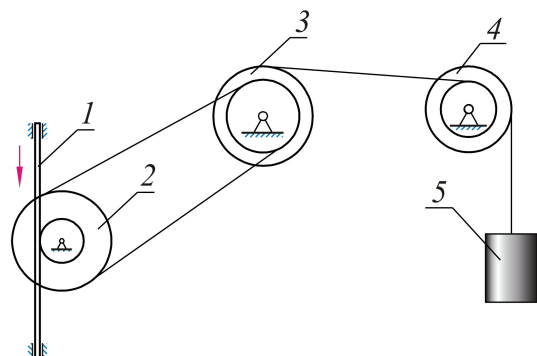
Вариант 21



Вариант 22

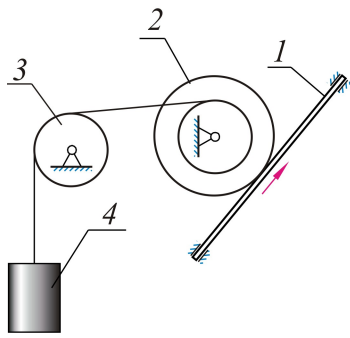


Вариант 23

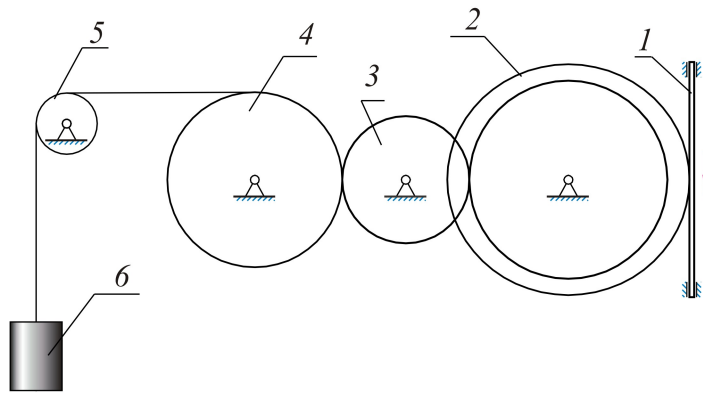


Вариант 24

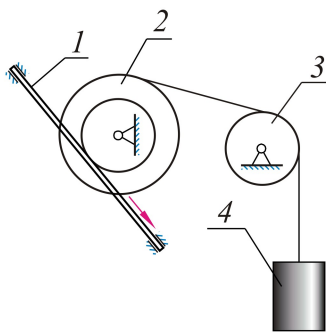
Рис. 55. Продолжение: Данные вариантов. Задание К2



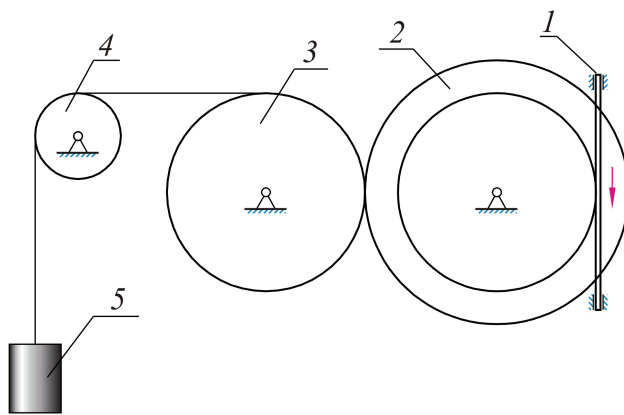
Вариант 25



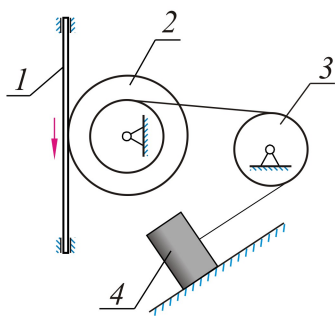
Вариант 26



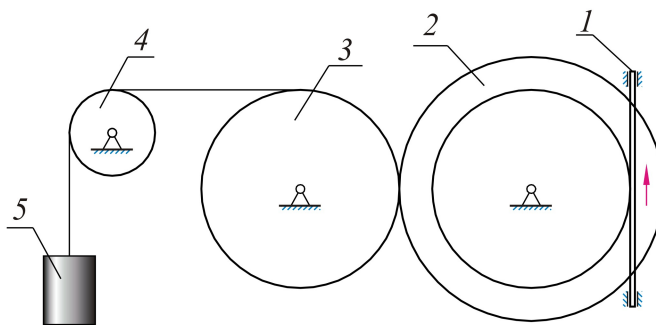
Вариант 27



Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30

Рис. 55. Продолжение: Данные вариантов. Задание К2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»(К2)

Пример №5

ЗАДАНИЕ:

Механическая система, состоящая из твердых тел (рис. 56), приводится в движение посредством ведущего звена 1 (направление движения обозначено стрелкой) по прилагаемому закону (табл.9*).

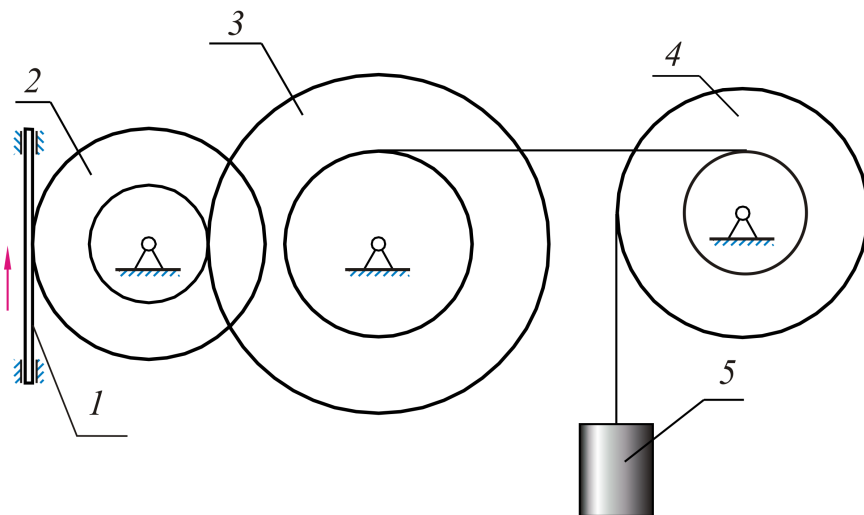


Рис.56. К данным примера №5

Согласно данным варианта определить требуемые кинематические параметры в указанный момент времени.

Таблица 9*

Данные к примеру №5

№ варианта	Закон движения: $s_1, (м)$; или $\varphi, (радиан)$	$R_2,$ <i>см</i>	$r_2,$ <i>см</i>	$R_3,$ <i>см</i>	$r_3,$ <i>см</i>	$R_4,$ <i>см</i>	$r_4,$ <i>см</i>	$R_5,$ <i>см</i>	$r_5,$ <i>см</i>	$t,$ <i>сек</i>	Определить
X	$s_1=0,3t^3-0,2t^2+5$	60	30	80	40	50	25	-	-	2	$\varepsilon_3, \omega_4, V_5$

РЕШЕНИЕ:

Определим линейную скорость зубчатой рейки (звено №1). Рейка совершает поступательное движение, поэтому скорости всех её точек равны между собой и могут быть определены в общем виде:

$$V_1 = \dot{s}_1 = (0,3t^3 - 0,2t^2 + 5)' = 0,9t^2 - 0,4t.$$

Так как поверхность контакта зубчатого колеса 2 и рейки 1, рассматриваемая в плоскости, будет иметь общую геометрическую точку, которая принадлежит одновременно двум этим звеньям, то можно сделать вывод о равенстве линейных (окружных) скоростей точек поверхности контакта зубчатого рейки и соприкасающейся с ней поверхности радиуса R_2 зубчатого ступенчатого колеса 2, совершающего вращательное движение относительно неподвижной оси. Зная расстояние от поверхности контакта до оси вращения,

можно определить угловую скорость данного звена ω_2 в общем виде:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{R_2} \cdot (0,9t^2 - 0,4t).$$

Линейная скорость зубчатого колеса 2 на расстоянии от оси вращения, равном r_2 , определится как: $V_2 = r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow V_2 = \frac{r_2}{R_2} \cdot (0,9t^2 - 0,4t)$.

Так как поверхность контакта радиуса r_2 звена 2 и радиуса R_3 звена 3, рассматриваемая в плоскости, имеет общую геометрическую точку, то можно сделать вывод о равенстве линейных (окружных) скоростей точек поверхностей контакта. Рассматривая звено 3, зная расстояние от поверхности контакта с известной окружной скоростью до оси вращения, можно определить угловую скорость звена ω_3 в общем виде:

$$\omega_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot (0,9t^2 - 0,4t) \Rightarrow \omega_3 = \frac{0,9r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot t^2 - \frac{0,4r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot t.$$

Угловое ускорение звена 3 в общем виде представим, пользуясь известной дифференциальной зависимостью: $\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt}$.

$$\text{Таким образом: } \varepsilon_3 = \left(\frac{0,9r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot t^2 - \frac{0,4r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot t \right)' \Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} (1,8t - 0,4).$$

$$\text{При } t = 2 \text{ сек: } \varepsilon_3 = \frac{0,30}{0,60 \cdot 0,80} (1,8 \cdot 2 - 0,4) \Rightarrow \varepsilon_3 = 2 \text{ с}^{-2}.$$

Линейная скорость зубчатого колеса 3 на расстоянии от оси вращения, равном r_3 , определится как:

$$V_3 = r_3 \cdot \omega_3 \Rightarrow V_3 = \frac{r_3 \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot (0,9t^2 - 0,4t).$$

Поверхность радиуса r_3 звена 3 и поверхность радиуса r_4 звена 4, рассматриваемые в плоскости, имеют равные линейные (окружные) скорости. Рассматривая звено 4, зная расстояние от центра масс с известной окружной скоростью до его МЦС (мгновенной оси вращения), можно определить угловую скорость звена ω_4 в общем виде:

$$\omega_4 = \frac{V_3}{r_4} = \frac{r_3 \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3 \cdot r_4} \cdot (0,9t^2 - 0,4t). \text{ В момент времени } t = 2 \text{ сек:}$$

$$\omega_4 = \frac{0,40 \cdot 0,30}{0,60 \cdot 0,80 \cdot 0,25} \cdot (0,9 \cdot 2^2 - 0,4 \cdot 2) \Rightarrow \omega_4 = 2,8 \text{ с}^{-1}.$$

Линейная скорость вращательного движения колеса 4 на расстоянии от оси вращения, равном R_4 , определится как:

$$V_4 = R_4 \cdot \omega_4 \Rightarrow V_4 = \frac{R_4 \cdot r_3 \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3 \cdot r_4} \cdot (0,9t^2 - 0,4t). \text{ В момент времени } t = 2 \text{ сек:}$$

$$V_4 = \frac{0,5 \cdot 0,40 \cdot 0,30}{0,60 \cdot 0,80 \cdot 0,25} \cdot (0,9 \cdot 2^2 - 0,4 \cdot 2) \Rightarrow V_4 = 1,4 \text{ м/с}.$$

Очевидно, что груз 5 совершает поступательное движение, при этом линейная скорость V_5 его движения вниз при разматывании нерастяжимой нити с поверхности радиуса R_4 звена 4 будет совпадать со скоростью точек, расположенных на этом радиусе, т.е.: $\vec{V}_4 = \vec{V}_5 = 1,4 \text{ м/с} = 140 \text{ см/с}$.

Представляем графически расчет на рис.57, а аналитические результаты в виде табл.9*.

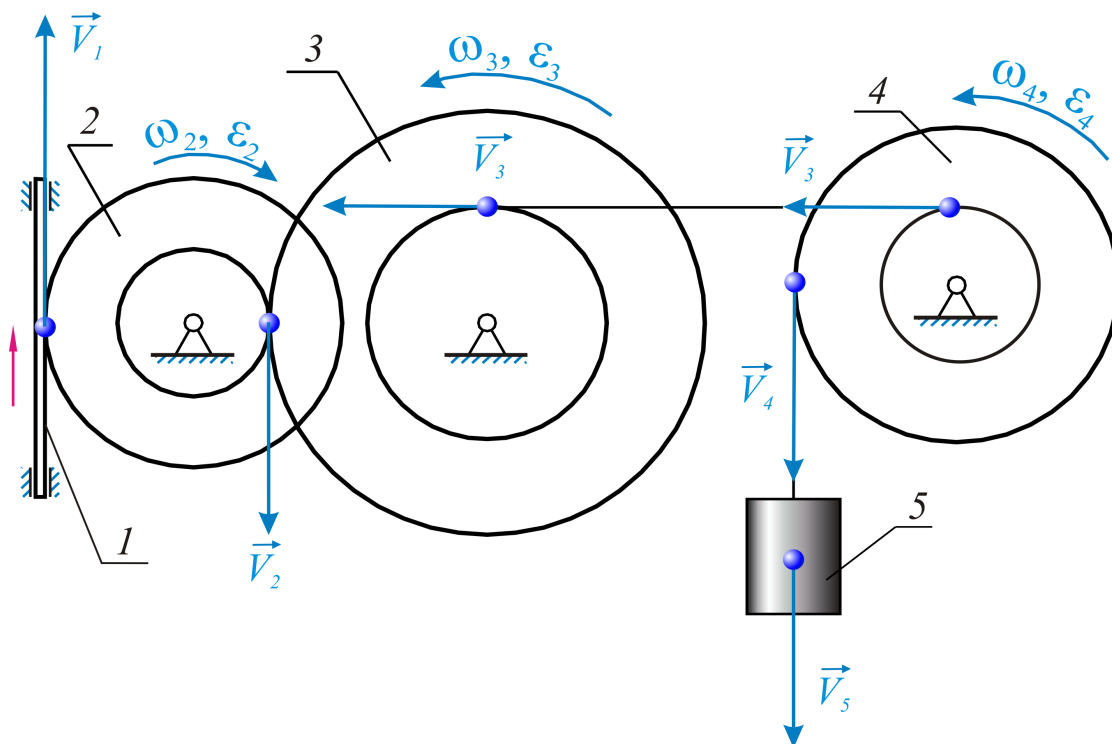


Рис.57. К решению примера №5

Таблица 9*

Результаты расчёта

Рассчитанные параметры	Угловое ускорение	Угловая скорость	Линейная скорость
Значение	$\varepsilon_3 = 2 \text{ с}^{-2}$.	$\omega_4 = 1,4 \text{ с}^{-1}$	$V_5 = 140 \text{ см/сек.}$

ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА»(К3)

Постановка задачи

Плоский кривошипно-ползунный механизм (рис. 58) приводится в движение кривошипом OA , которому сообщается постоянная угловая скорость $\omega = \dots c^{-1}$.

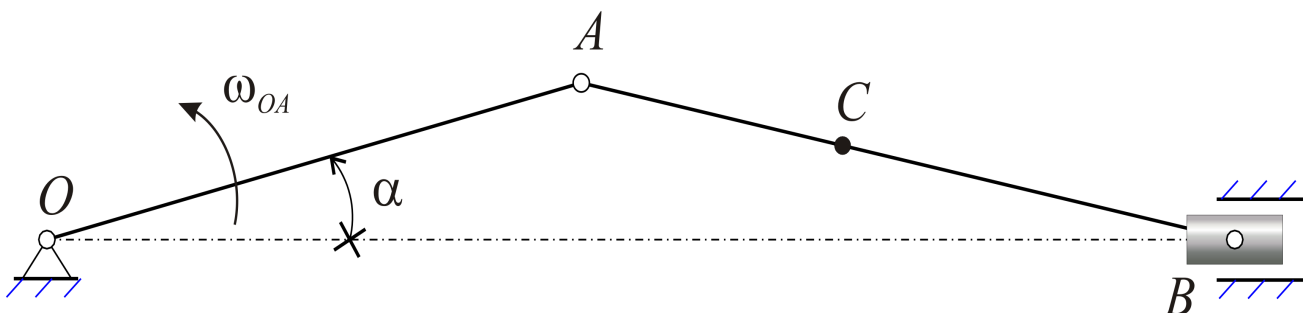


Рис.58. К данным задания К3

Положение механизма для заданного момента времени определяется параметрами, указанными в таблице 11. Найти направления и модули векторов скоростей, ускорений точек A, B, C , угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB способами, согласно указанию преподавателя. Результаты расчёта представить в виде таблицы 10.

Таблица 10

Результаты расчёта

Определяемые данные							
Скорость точек, м/с			Угловая скорость, c^{-1}	Ускорение точки, м/с ²			Угловое ускорение, c^{-2}
V_A	V_B	V_C	ω_{OA}	a_A	a_B	a_C	ϵ_{AB}

Указания

Задача К3 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При её решении необходимо пользоваться теоремами о скоростях и ускорениях точек, принадлежащих телу, совершающему плоскопараллельное движение.

ДАННЫЕ ВАРИАНТОВ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ (К3)

Таблица 11

Данные к работе К3

№ варианта	Линейные размеры			Угловая скорость ω_{OA}, c^{-1}	Положение $\alpha, градус$
	$OA, см$	$AB, см$	$AC, см$		
1	1	5	1	0,5	15
2	2	5	2	1	30
3	3	5	3	1,5	45
4	4	5	4	2	60
5	5	10	2	0,5	7,5
6	6	10	3	1	105
7	7	10	4	1,5	120
8	8	10	5	2	135
9	9	12	3	0,5	150
10	10	12	4	1	165
11	1,5	12	5	1,5	195
12	2,5	12	7	2	210
13	3,5	6	1,5	3	225
14	4,5	6	4,5	4	240
15	5,5	8	2	1	265
16	6,5	8	6	1,5	285
17	7,5	11	3	2	300
18	8,5	11	5	3	315
19	9,5	11	7	4	330
20	10,5	14	5	1	345
21	5	14	4	1,5	15
22	5,5	14	3	2	30
23	6	14	2	3	45
24	6,5	14	8	4	60
25	7	14	9	1	75
26	7,5	13	10	1,5	105
27	8	13	4	2	120
28	8,5	13	5	3	135
29	9	15	7	4	150
30	9,5	15	12	0,5	165

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ НА ТЕМУ «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО ШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА»(КЗ)

Пример №6

ЗАДАНИЕ: Плоский кривошипно-ползунный механизм (рис. 59) приводится в движение кривошипом OA , которому сообщается постоянная угловая скорость. Найти направления и модули векторов скоростей, ускорений точек A, B, C , угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB способом, согласно указанию преподавателя. Результаты расчёта представить в виде таблицы.

ДАННЫЕ: Положение механизма для заданного момента времени параметрами, указанными в таблице 11*.

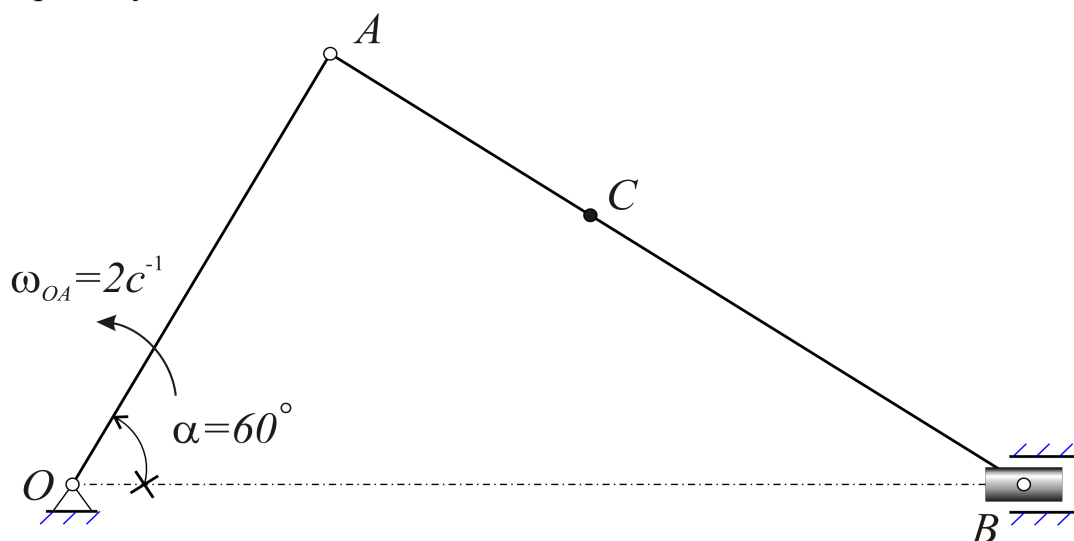


Рис.59. К данным примера №6

Таблица 11*

Данные к примеру КЗ

№ варианта	Линейные размеры			Угловая скорость ω_{AB}, c^{-1}	Положение $\alpha, градус$
	$OA, см$	$AB, см$	$AC, см$		
X	5	8	3	2	60

РЕШЕНИЕ:

1. Найдем линейную скорость точки A ведущего звена OA .

Так как звено OA совершает вращательное движение относительно неподвижной точки O , то линейная скорость точки A , отстоящей от точки O на расстоянии $h = |OA|$, будет равна:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot |OA| = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см/с}.$$

Вектор V_A в одну сторону с ω_{OA} и перпендикулярен OA (рис.60, а).

2. Определим линейные(окружные) скорости точек, а также угловые скорости звеньев при помощи плана скоростей.

Для этого в плоскости чертежа возьмём произвольную точку O_1 . Отложим от нее в направлении вектора \vec{V}_A отрезок O_1a в масштабе, соответствующий модулю \vec{V}_A (рис. 60, б).

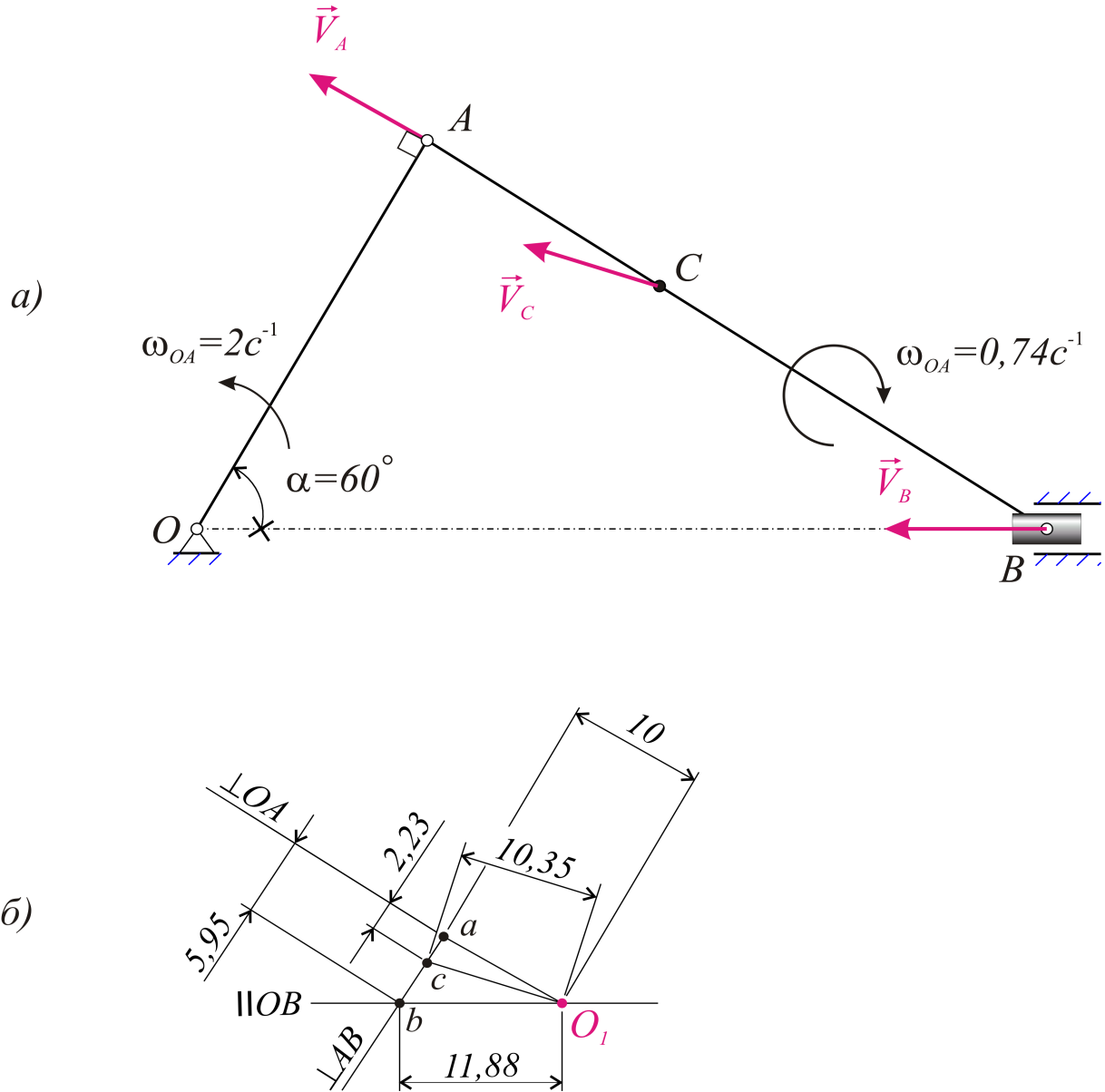


Рис. 60. Метод плана скоростей: а) положение векторов скоростей на расчётной схеме; б) план скоростей

Ползун B совершает прямолинейное поступательное движение вдоль прямой OB . Поэтому вектор скорости точки B будет направлен вдоль линии OB . Отложим от полюса O_1 луч, параллельный OB , а от точки c плана скоростей – луч, перпендикулярный звену AB . Последний определяет направление вращательной скорости точки B по отношению к точке A , принятой за полюс в соответствии с теоремой скоростей при

плоскопараллельном движении, по которой: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$.

Точка пересечения проведённых лучей av определит скорость \vec{V}_B . Измеренный на плане скоростей в масштабе отрезок O_1v соответствует модулю скорости точки B . Таким образом, $V_B = 11,88 \text{ см/с}$.

Угловую скорость звена AB найдем по формуле:

$$\omega_{AB} = \frac{|av|}{|AB|}. \quad \text{Здесь размер } |av| = 5,95 \text{ см, соответствующий модулю}$$

вращательной скорости точки B относительно полюса A , берётся из плана скоростей согласно масштабу, а размер AB - из расчетной схемы.

Таким образом:

$$\omega_{AB} = \frac{5,95}{8} \Rightarrow \omega_{AB} = 0,74 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения скорости точки C , принадлежащей шатуну AB , отыщем положение точки c на плане скоростей. Данная точка лежит на av и делит данный отрезок согласно пропорции:

$$\frac{|ac|}{|av|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |ac| = \frac{3}{8} \cdot 5,95 \Rightarrow ac = 2,23 \text{ см}.$$

Полученную на плане скоростей точку c соединяем с полюсом O_1 .

Направление отрезка O_1c определит направление вектора скорости точки C , а измеренный на плане скоростей в масштабе отрезок O_1c будет соответствовать модулю скорости точки C . Таким образом, получаем значение скорости $V_C = 10,35 \text{ см/с}$.

3. Определим скорости точек и угловую скорость звена AB методом МЦС. Для этого используем расчетную схему, изображённую в выбранном масштабе на рис. 61. Из точки A проведём луч перпендикулярно вектору \vec{V}_A . Из точки B проведём луч перпендикулярно известному направлению вектора скорости \vec{V}_B . Согласно свойствам МЦС, точка пересечения этих лучей - P_{AB} будет являться мгновенным центром скоростей (МЦС) шатуна AB . Определим скорость точки B , используя свойство МЦС, по которому:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{|BP_{AB}|}{|AP_{AB}|} \Rightarrow V_B = V_A \cdot \frac{|BP_{AB}|}{|AP_{AB}|} = 10 \cdot \frac{15,981}{13,454} \Rightarrow V_B = 11,88 \text{ см/с}.$$

Определим направление скорости точки C , для этого проведём отрезок CP_{AB} . Перпендикуляр, восстановленный через C к этому отрезку, определит положение вектора скорости \vec{V}_C , а его модуль, согласно свойствам МЦС, будет равен:

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{|CP_{AB}|}{|AP_{AB}|} \Rightarrow V_C = V_A \cdot \frac{|CP_{AB}|}{|AP_{AB}|} = 10 \cdot \frac{13,925}{13,454} \Rightarrow V_C = 10,35 \text{ см/с}.$$

Угловую скорость звена AB , согласно свойствам МЦС, можно определить как:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{|AP_{AB}|} = \frac{10}{13,454} = 0,74 \text{ с}^{-1}.$$

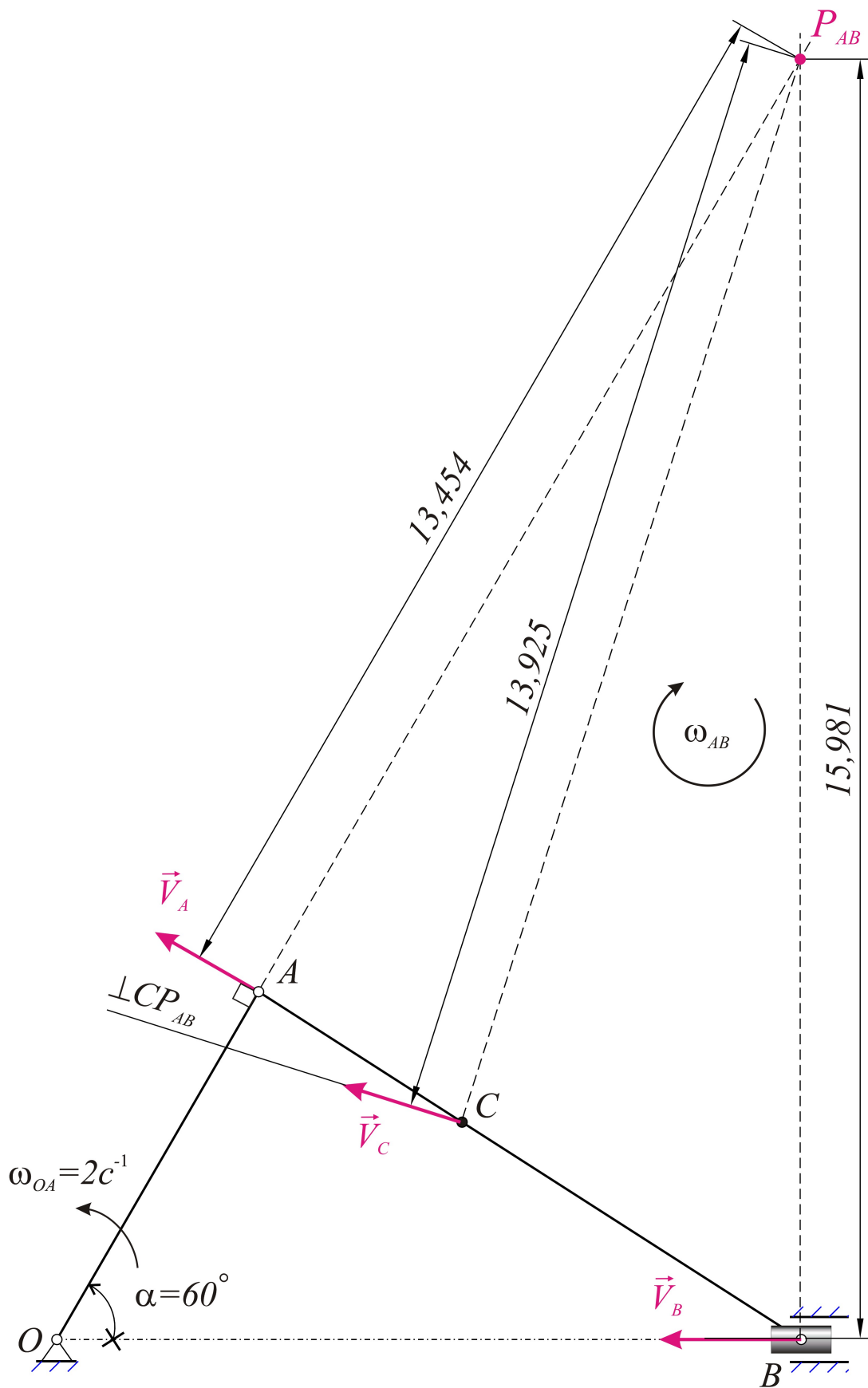


Рис. 61. Метод МЦС при определении линейных скоростей точек и угловой скорости звена AB

4. Определим ускорения точек при помощи планов ускорений (рис.62).

Ускорение точки A определится рассмотрением равномерного вращательного движения, которое совершает кривошип OA . Очевидно, что:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^{\tau} + \vec{a}_{AO}^n. \quad \text{Для равномерного вращательного движения } \vec{a}_{AO}^{\tau} = 0 \Rightarrow$$

$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^n$. Направление вектора полного ускорения точки A будет совпадать с направлением вектора нормального (центростремительного) ускорения (т.е. по линии AO от точки A к точке O). А модуль вектора полного ускорения точки A определится по формуле: $a_A = \omega_{OA}^2 \cdot |OA| = 2^2 \cdot 5 = 20 \text{ см/с}^2$.

Вектор ускорения точки B согласно теореме об ускорениях при плоскопараллельном движении, которое совершает звено AB , можно представить в виде векторной суммы вектора ускорения точки A , принятой за полюс, вектора касательного ускорения точки B в её вращательном движении относительно полюса и вектора центростремительного ускорения точки в её вращательном движении относительно этого же полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^e + \vec{a}_{BA}^u.$$

Согласно данной теореме, от точки B в выбранном масштабе отложим известный по модулю и направлению вектор \vec{a}_A . От конца данного вектора отложим в масштабе вектор \vec{a}_{BA}^u в направлении от B к A , параллельно звену AB , величина которого составляет:

$$\vec{a}_{BA}^u = \omega_{AB}^2 \cdot |AB| = 0,74^2 \cdot 8 \Rightarrow \vec{a}_{BA}^u = 4,38 \text{ см/с}^2.$$

Так как точка B принадлежит также ползуну, который совершает прямолинейное поступательное движение, то направление вектора полного ускорения точки B известно – он направлен вдоль прямой OB .

Из конца вектора \vec{a}_{BA}^u проводим луч, перпендикулярный звену AB . Точка пересечения этого луча и прямой OB определит концы вектора касательного ускорения точки B в её вращательном движении относительно полюса и вектора полного ускорения. Измерение полученных отрезков с учётом масштаба позволяет определить модуль ускорения точки B , а также угловое ускорение звена AB . Таким образом, из плана ускорения точки B получим:

$$a_B = 4,1 \text{ см/с}^2; \quad a_{BA}^e = 17,78 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Т.к. } a_{BA}^e = \varepsilon_{AB} \cdot |AB| \Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^e}{|AB|} = \frac{17,78}{8} \Rightarrow \varepsilon_{AB} = 2,22 \text{ с}^{-2}.$$

Построим план ускорений для точки C и определим её ускорение (рис.63). Примем точку A за полюс. Тогда согласно теореме об ускорениях при плоскопараллельном движении: $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^e + \vec{a}_{CA}^u$.

Согласно данной теореме, от точки C в выбранном масштабе отложим известный по модулю и направлению вектор \vec{a}_A . От конца данного вектора отложим в масштабе вектор \vec{a}_{CA}^u в направлении от C к A , параллельно звену AB , величина которого составляет:

$$\vec{a}_{CA}^u = \omega_{AB}^2 \cdot |AC| = 0,74^2 \cdot 3 \Rightarrow \vec{a}_{CA}^u = 1,64 \text{ см/с}^2.$$

От конца данного вектора в направлении углового ускорения ε_{AB}

перпендикулярно звену AB отложим вектор \vec{a}_{BA}^6 , величина которого

$$a_{BA}^6 = \varepsilon_{AB} \cdot |AC| \Rightarrow a_{BA}^6 = 2,22 \cdot 3 = 6,66 \text{ см/с}^2.$$

Отрезок, проведённый из точки C к концу вектора \vec{a}_{BA}^6 , определит положение и модуль вектора ускорения точки C . Таким образом, измеренный в соответствии с масштабом вектор \vec{a}_C равен по величине:

$$a_C = 13,3 \text{ см/с}^2.$$

5. Определим ускорение точки C методом МЦУ (рис. 63). Вначале определим положение МЦУ по известным векторам ускорений точек A и B . Примем точку A за полюс. К точке B приложим вектор \vec{a}_A и \vec{a}_B .

Согласно теореме ускорений: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^6 + \vec{a}_{BA}^u \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$.

Вектор \vec{a}_{BA} представляет собой одну из сторон параллелограмма, диагональю которого является вектор \vec{a}_B . Направление вектора \vec{a}_{BA} определяет направление углового ускорения ε_{AB} . В данном случае оно будет направлено относительно точки A против часовой стрелки. Измерим угол $\sphericalangle \alpha$ между вектором \vec{a}_{BA} и звеном AB . Согласно чертежу: $\sphericalangle \alpha = 76^\circ$.

Поворачивая вектора ускорений \vec{a}_A и \vec{a}_B приложенных к соответствующим точкам на угол $\sphericalangle \alpha = 76^\circ$ и продлевая их линии действия, мы получим точку пересечения - Q_{AB} , которая будет являться МЦУ звена AB . Соединим точку C с точкой Q_{AB} . Согласно свойствам МЦУ:

$$\frac{a_C}{a_A} = \frac{|CQ_{AB}|}{|AQ_{AB}|} \Rightarrow a_C = a_A \cdot \frac{|CQ_{AB}|}{|AQ_{AB}|} = 20 \cdot \frac{5,83}{8,75} \Rightarrow a_C = 13,3 \text{ см/с}^2.$$

По аналогии, можно выполнить проверочный расчёт ускорения точки B .

$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{|BQ_{AB}|}{|AQ_{AB}|} \Rightarrow a_B = a_A \cdot \frac{|BQ_{AB}|}{|AQ_{AB}|} = 20 \cdot \frac{1,799}{8,75} \Rightarrow a_B = 4,1 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора ускорения точки C определяется отложением угла $\sphericalangle \alpha_0 = -\alpha = -76^\circ$ (по часовой стрелке) от направления CQ_{AB} (см. рис. 63).

Представим рассчитанные разными способами кинематические параметры в виде таблиц и убедимся в корректности полученных результатов.

Таблица 12

Результаты расчёта

Определяемые данные и методы							
Скорость точек, см/с			Угловая скорость, с ⁻¹	Ускорение точки, см/с ²			Угловое ускорение, с ⁻²
V_A	V_B	V_C	ω_{AB}	a_A	a_B	a_C	ε_{AB}
Способ плана скоростей				Способ плана ускорений			
10*	11,88	10,35	0,74	-	4,1	13,3	2,22
Способ МЦС				Способ МЦУ			
10*	11,88	10,35	0,74	-	4,1	13,3	2,22*

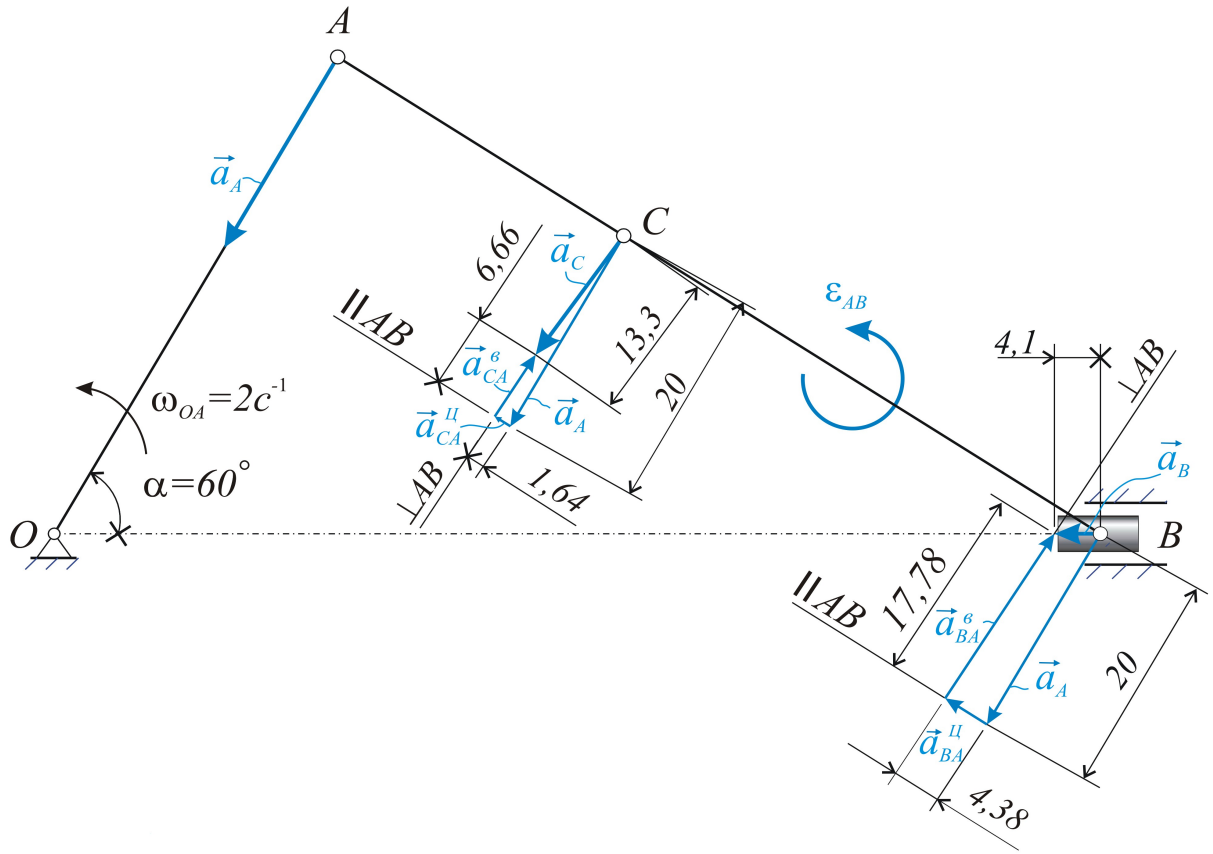


Рис. 62. Определение ускорений точек B, C и углового ускорения звена AB с помощью плана ускорений

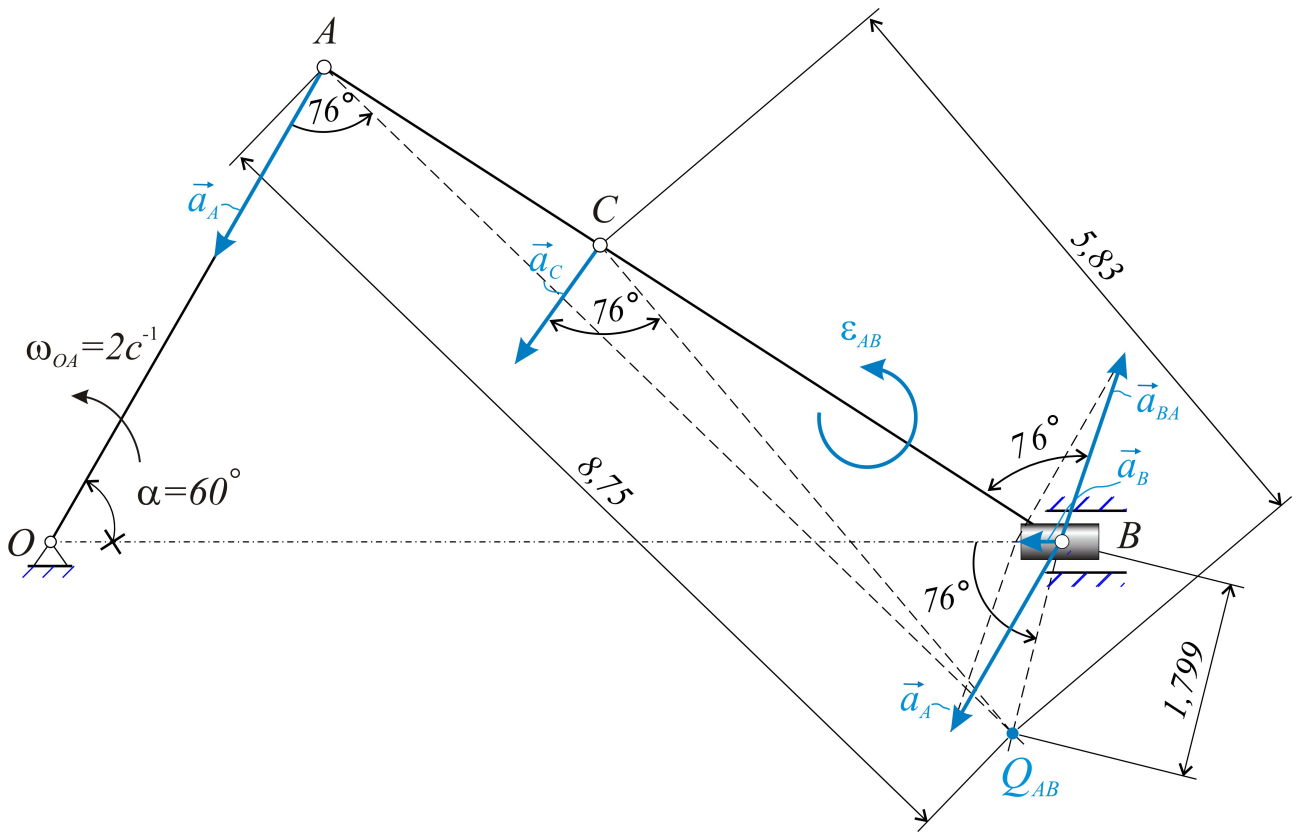


Рис. 63. Определение ускорения точки C методом МЦУ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для вузов/ Н.С. Пискунов.-4-е изд., доп.-М.: Физматгиз, 1963. - 856 с.: ил.
2. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов/ И.М. Воронков.-13-е изд., испр.-М.: Наука, 1966.-596 с.: ил.
3. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1: Учеб. пособие/ М.И. Бать., Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-М.: Наука, 1968. - 512 с.: ил.
4. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/ С.М. Тарг.-10-е изд., перераб. и доп.-М.: Высш.шк., 1986. - 415с.: ил.
- 5.Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие.-2-е изд., испр. и доп./ Под ред. К.С. Колесникова.-М.: Наука., 1989. - 448 с.
6. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов/М.М. Гернет.-5-е изд., испр.-М.: Высш.шк., 1987. - 344 с.: ил.
7. Курс теоретической механики: Учеб. для машиностр. и приборостр. специальностей вузов/ Н.Н. Никитин. - 6-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 2003. -719 с.: ил.
8. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов/ А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. - 14-е изд., испр. - М.: Интеграл-Пресс, 2007.- 608 с.
9. Краткий лекционный курс теоретической механики: Учеб. пособие/ А.С. Демидов, Н.А. Кулагина/ Рубцовский индустриальный институт. - Рубцовск, 2008. - 115 с.

Демидов Александр Станиславович
Кулагина Надежда Александровна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Статика и кинематика

Учебное пособие для студентов заочной формы обучения специальностей 190201.65 «Автомобиле- и тракторостроение», 190601.65 «Автомобили и автомобильное хозяйство», 190206.65 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», 151001.65 «Технология машиностроения», 150204.65 «Машины и технология литейного производства», 260601.65 «Машины и аппараты пищевых производств», 290300 «Промышленное и гражданское строительство»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подготовка оригинала-макета А.С. Демидов

Подписано к печати 11.11.09. Формат 60X84 1/16
Усл. печ. л. 7,0. Тираж 100 экз. Зак. 09-763. Рег № 75

Отпечатано в типографии ООО Фирма «Выбор»
658213, Рубцовск, Ленина, 41